SCIENCES ET MATHÉMATIQUES

DIDACTIQUE

9 à 14 ans

GRANDES IDÉES POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Pour acquérir des bases solides afin de mieux accompagner les élèves

MARIAN SMALL

Adaptation : Vicky Richard

CHENELIÈRE ÉDUCATION

Introduction

Quelques remarques sur l'enseignement de la mathématique

L'enseignement de la mathématique aux élèves de 9 à 14 ans n'est pas toujours une tâche facile. Puisque le programme de mathématique a été grandement raffiné ces dernières années, un certain nombre d'enseignants de ces élèves n'ont pas toujours pu bénéficier d'une formation solide à propos d'une partie du nouveau contenu qu'ils doivent enseigner. Même lorsque le contenu leur est familier, les approches en enseignement de cette matière qu'imposent les programmes au pays sont désormais très différentes de celles que beaucoup d'enseignants ont connues eux-mêmes. En d'autres termes, l'enseignement de la mathématique, même s'il est destiné à de jeunes élèves, peut se révéler complexe et difficile.

L'approche de la mathématique et de son enseignement s'est sensiblement raffinée au fil des ans.

L'importance d'être à l'aise avec la mathématique enseignée

Que peut-on faire alors pour rendre cette tâche plus facile et plus utile ? La réponse à cette question prend ici la forme d'une métaphore. Nous savons tous, pour en avoir si souvent fait l'expérience dans notre vie personnelle, que l'accomplissement de nos tâches est plus fructueux lorsque nous sommes confiants et bien à l'aise dans une situation donnée. Nous savons aussi que ce sentiment de confiance est généralement perçu par ceux qui nous entourent et qu'il leur inspire souvent une aisance analogue.

Par exemple, lorsque l'on fait découvrir son quartier résidentiel à des visiteurs, on a une connaissance intuitive de ce qu'il faut faire, et les visiteurs sentent bien que leur hôte possède les connaissances générales nécessaires pour parvenir à la destination choisie. Par contre, si on les emmène dans des endroits peu familiers, ils sentent aussi que l'on est incertain et que l'on se fie à des « règles » (ici, des cartes géographiques) auxquelles on se reporte constamment. Ainsi, contrairement aux situations où l'on se trouve dans sa zone de confort et où les visiteurs se sentent à l'aise, ceux-ci se fient encore aux indications de leur hôte, sauf que, cette fois-ci, ils ne sont pas certains d'atteindre leur destination.

De façon analogue, nos élèves sont nos « visiteurs ». Notre tâche consiste à développer leur sentiment de confiance et à les assurer qu'ils peuvent vraiment comprendre les nouvelles notions qui leur sont présentées. Pour ce faire, nous devons les aider à se créer une carte intérieure illustrant la façon dont ces nouvelles notions sont liées à ce qu'ils savent déjà. Il s'ensuit que nous, les enseignants, devons d'abord disposer de cette carte intérieure, afin que nos élèves puissent reconnaître notre sentiment de confiance et notre aisance.

En tant qu'enseignants, notre travail consiste à inculquer à nos élèves la confiance qui leur est nécessaire pour bien comprendre les nouvelles notions que nous leur présentons.

Ce que signifie l'enseignement de grandes idées

Se servir d'une liste d'attentes ou de résultats aux fins de l'enseignement effectué est tout à fait contraire aux conclusions des travaux de recherches ayant révélé que l'apprentissage des élèves est optimal lorsque ceux-ci peuvent établir des liens entre les notions.

L'absence d'une carte intérieure du sujet traité représente l'une des lacunes affectant les connaissances mathématiques d'un grand nombre d'enseignants : ils ne possèdent pas une compréhension fondamentale des liens unissant diverses questions mathématiques et ils ne savent pas quelles questions s'avèrent, à long terme, plus importantes que les autres et quelles facettes de ces questions sont essentielles. À la longue, beaucoup d'enseignants ont souvent l'impression de suivre une liste de tâches à effectuer et de cocher des cases pour indiquer que les élèves ont appris chaque nouvelle notion ou compétence précise inscrite au programme scolaire. C'est tout à fait contraire à ce qu'ont révélé des travaux de recherches : les élèves apprennent beaucoup mieux lorsque les liens unissant les notions déjà connues et les éléments nouvellement enseignés sont clairement mis en relief (Borko et Putnam, 1995 ; Schifter, Bastable et Russell, 1997 ; Kennedy, 1997). Les grandes idées aident les enseignants et les élèves à établir ces liens.

Par exemple, au lieu de présenter les nombres décimaux aux élèves comme s'il s'agissait d'un système de numération complètement nouveau, il importe plutôt que les élèves les envisagent à la fois comme une autre forme de représentation des fractions et comme un prolongement du système de valeur de position des nombres naturels à base 10, soit un contenu qu'ils connaissent bien déjà. C'est précisément le cœur de la première grande idée relative aux nombres décimaux (*voir la page 68*) : les nombres décimaux constituent une autre forme de représentation des fractions, qui permet le développement de modèles, des comparaisons et des calculs concordant avec les nombres, parce que la partie décimale prolonge le modèle du système de valeur de position à base 10.

L'interprétation du programme scolaire est une autre des difficultés qu'affrontent les enseignants. Le recours à de grandes idées peut également s'avérer utile dans ce cas. Certains résultats attendus ou certaines attentes figurant au programme ont une portée plus large que d'autres, mais ce n'est pas toujours facile de les y repérer. De grandes idées peuvent aider les enseignants à évaluer les notions sur lesquelles ils doivent mettre l'accent, afin de satisfaire à diverses attentes ou d'obtenir divers résultats ; ils peuvent ainsi mieux comprendre la signification de certains de ces résultats et de diverses attentes de plus grande portée. Par exemple, supposons que l'une des notions du programme consiste à « résoudre des problèmes nécessitant une conversion de petites unités métriques en unités plus grandes ». L'enseignant ne saisit peut-être pas immédiatement que l'une des principales raisons de convertir des mesures est liée à notre capacité d'utiliser des mesures de référence pour bien interpréter et communiquer des mesures effectuées (*voir la grande idée n° 4, page 144* : Une bonne connaissance des mesures de référence permet d'estimer et de calculer d'autres mesures plus facilement). Autrement dit, la conversion d'une petite unité en une unité plus grande conduit souvent une personne à se servir de mesures de référence connues de la plupart des gens. Par exemple, il est plus facile, pour la majorité d'entre nous, de visualiser « à quoi ressemblent » 3,1 m, plutôt que 310 cm ou que 3100 mm, parce que 3 m est une longueur de référence, contrairement à 300 cm ou à 3000 mm. Si un enseignant comprend qu'il s'agit là de la grande idée sous-tendant l'attente ou la maîtrise de la notion au programme, il peut alors expliquer les notions et les compétences relatives à la conversion d'une manière beaucoup plus efficace que s'il adoptait une approche axée sur les habiletés, bien plus superficielle.

Les grandes idées peuvent également faire en sorte que les enseignants et les élèves vont bien comprendre l'intention générale que visent une leçon ou une tâche spécifique. Les enseignants font souvent appel à des tâches qui semblent fructueuses parce qu'elles sont très stimulantes pour les élèves. Toutefois, l'intention pour laquelle les élèves exécutent cette tâche n'est pas claire, et l'enseignant ne sait pas ce sur quoi il devrait mettre l'accent pendant qu'il oriente le travail des élèves au cours de la tâche et après sa conclusion. Le recours à de grandes idées amène les enseignants à jeter un regard critique sur une tâche ou une leçon, à se demander pourquoi ils donnent cette tâche ou cette leçon aux élèves et à s'assurer que l'intention est claire pour les élèves, ce qui accentue d'autant l'utilité de cette tâche ou de cette leçon. Ainsi, maints enseignants ont recours à des tâches comportant l'utilisation de blocs mosaïques à assembler lorsqu'ils abordent la géométrie (*voir la photographie ci-dessous*), mais sans s'apercevoir que la raison d'être de ces tâches est d'axer l'attention des élèves sur les attributs de la figure qu'ils étudient (grande idée n° 3, sur les formes et leurs propriétés).

Constater que des figures peuvent être réarrangées en d'autres figures aide les élèves à être attentifs aux propriétés de celles-ci (grande idée n° 3, sur les formes et leurs propriétés, *voir la page 105*), par exemple les figures ayant des angles qui permettent l'assemblage d'une figure plus volumineuse, ainsi que l'emplacement des côtés égaux entre eux.

Tout comme on ne suit généralement pas le programme scolaire dans son ordre de présentation, on n'enseigne pas les grandes idées dans un ordre précis. Pour l'enseignant, il s'agit simplement, afin d'enseigner d'une façon utile et pratique la matière inscrite au programme (que ce soit la façon utilisée dans un texte de référence, celle qu'une commission scolaire a déterminée ou celle qu'un enseignant a lui-même choisie), de se reporter régulièrement aux grandes idées en choisissant et en adaptant les tâches à accomplir, ainsi qu'en posant des questions qui ramènent ces grandes idées à l'avant-plan.

Malgré la présence accrue de notions abstraites et l'évolution des priorités au fil des années scolaires, les grandes idées demeurent fondamentalement simples et

Les grandes idées demeurent fondamentalement simples et sont les mêmes d'une année scolaire à la suivante dans tout le réseau des écoles primaires.

sont les mêmes d'une année scolaire à l'autre. Par exemple, la grande idée n° 2, sur les régularités (*voir la page 1*), selon laquelle la structure mathématique d'une suite peut être représentée de diverses façons, s'applique tout autant lorsque les élèves créent des suites de figures simples que lorsqu'ils réalisent des suites numériques plus complexes. De même, dans toute étude des probabilités, il importe que les élèves reconnaissent qu'ils ne peuvent jamais être certains de l'événement à venir (grande idée n° 3, sur la probabilité), et ce, qu'ils effectuent une expérience simple de 9 à 11 ans ou une simulation plus complexe à 12 ou 13 ans.

Mais le plus important, c'est que les grandes idées soient présentes explicitement, et non implicitement. Que ce soit dans le cadre de la tâche elle-même, des questions et des indices formulés par l'enseignant ou d'un exposé de celuici, il importe que les grandes idées soient bien explicitées.

Peu importe que ces élèves aient recours à une probabilité expérimentale ou à une probabilité théorique afin de prévoir l'événement à venir, elles savent qu'elles ne peuvent le prédire avec certitude (grande idée n° 3, sur la probabilité, *voir la page 223*).

Il faut non seulement enseigner la matière au moyen des grandes idées, mais aussi expliciter directement ces dernières.

Plus les élèves entendent fréquemment l'expression d'une idée, plus ils sont susceptibles de l'intégrer et de savoir l'utiliser pour faciliter l'apprentissage de nouvelles notions. Par exemple, en géométrie, la grande idée n° 4 (*voir la page 105*) est que beaucoup de propriétés et de caractéristiques géométriques sont liées à une mesure. Pendant que les élèves apprennent la classification des triangles, une question telle que « Quelles mesures faut-il connaître afin de déterminer si un triangle est scalène ? » placerait cette grande idée à l'avant-plan.

Plus que toute autre chose, l'enseignant doit évaluer si les élèves ont acquis une compréhension solide des grandes idées (Wiggins et McTighe, 1999).

L'enseignant doit aussi prendre en compte les grandes idées au moment de planifier son enseignement et ses outils d'évaluation. Ainsi, lors de la planification d'une leçon de géométrie avec des élèves de 9 et 10 ans, il peut établir lesquelles des grandes idées sont pertinentes en regard du contenu mathématique de cette leçon. Il planifie ensuite la leçon de façon à s'assurer que, chaque jour, il pose des questions qui suscitent une discussion ouverte sur ces grandes idées. En ce qui concerne la planification de l'évaluation relative à cette leçon, il peut mettre au point des tâches appropriées à évaluer qui graviteraient autour des grandes idées pertinentes. Trop souvent, l'évaluation de l'enseignant est axée sur des détails et sur des aspects moins importants de la mathématique, alors que c'est la compréhension de l'ensemble qui compte vraiment.

La structure de l'ouvrage

La structure du présent ouvrage est axée sur les grandes idées de la mathématique enseignées aux élèves de 9 à 14 ans. Chaque chapitre est centré sur l'un des cinq domaines mathématiques et est subdivisé en connaissances. Chaque sujet abordé dans chaque domaine est traité à la lumière d'un ensemble de grandes idées comme il est défini dans le programme scolaire. Voici un exemple.

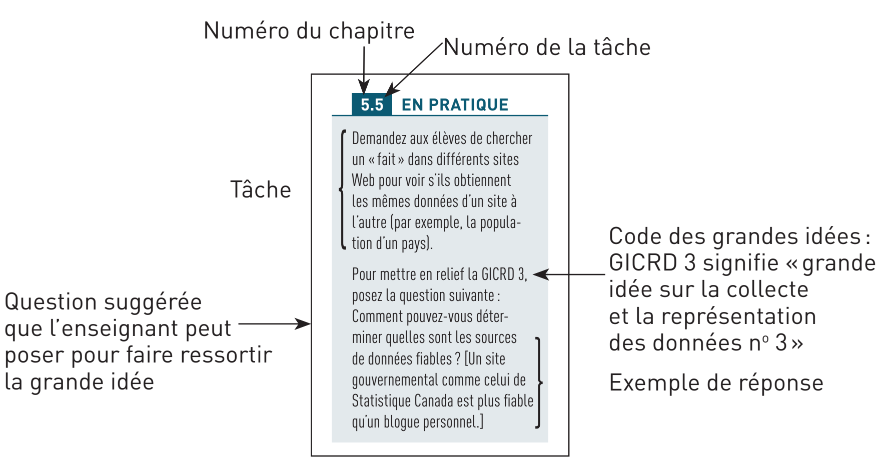
Chapitre 2 Les nombres et les opérations
Sujets : Les nombres supérieurs à 1000
La théorie des nombres
Les opérations avec des nombres naturels
Les fractions
Les nombres décimaux
Le raisonnement proportionnel : taux, rapport et pourcentage
Les nombres entiers

Le corps de l'ouvrage aide l'enseignant à mieux comprendre la matière qu'il doit connaître afin que ses élèves saisissent bien le contenu propre au domaine étudié.

L'un des traits particuliers du présent ouvrage se situe dans les rubriques **En pratique** figurant dans les marges. Il s'agit de tâches et d'activités portant sur le contenu mathématique étudié dans le corps du texte, ainsi que de questions que l'enseignant peut poser en vue de mettre les grandes idées à l'avant-plan. Ces suggestions pédagogiques prennent la forme de tâches modèles assorties de questions modèles visant à mettre en relief les grandes idées pertinentes. Une grande partie de ces rubriques peuvent être adaptées à des situations similaires propres à un autre niveau scolaire, qui peuvent s'avérer plus intéressantes pour un lecteur donné.

Les idées pédagogiques comprennent des tâches et des questions qui portent sur le contenu mathématique étudié et que l'enseignant peut utiliser pour mettre les grandes idées à l'avant-plan.

L'exemple ci-dessous (*tiré de la page 194*) illustre bien la structure de ces rubriques. Il est à noter qu'aucune année scolaire précise n'a été associée aux suggestions pédagogiques, parce qu'un contenu donné est enseigné durant différentes années scolaires au Canada. Puisque le contenu pertinent est traité tout juste à côté de la rubrique **En pratique** concernée, le lecteur devrait



À côté de la suggestion pédagogique étudiée, le corps du texte traite de données secondaires en tant que source d'information.

facilement reconnaître les liens unissant la suggestion pédagogique et le contenu qu'il enseigne, et être en mesure d'établir la pertinence de cette idée pour son année scolaire.

D'autres caractéristiques de l'ouvrage

Plusieurs chapitres (mais pas tous) proposent des listes de principes ou d'éléments importants pour aider l'enseignant à mieux structurer son travail. Ces principes ou éléments importants sont généralement de moindre envergure que les grandes idées, mais il s'agit néanmoins de notions essentielles qui doivent être explicitées en classe et qui ne sont peut-être pas toujours des plus faciles pour tous les enseignants.

Ainsi, la liste des principes relatifs à la comparaison des fractions (*voir la page 54*) renvoie à plusieurs idées propres à cette comparaison. En voici deux exemples : si deux fractions ont le même dénominateur, celle ayant le plus grand numérateur est la plus grande des deux ; si deux fractions ont le même numérateur, celle ayant le plus grand dénominateur est la plus petite des deux. Ces idées ne sont pas aussi générales que celle qui constitue la grande idée, c'est-à-dire que la reformulation de fractions est souvent la démarche clé permettant de les comparer entre elles ou d'effectuer des calculs avec elles (*voir la grande idée nº 3, page 47*), mais elles vont aider l'enseignant à mieux expliquer sa matière pour illustrer cette grande idée. De même, la liste des facteurs importants au sujet des mesures de tendance centrale et de la distribution des données, présentée dans le chapitre 5 (*voir la page 202*), va aider l'enseignant à orienter sa leçon pour mieux expliquer la grande idée nº 4 (*voir la page 188*), c'est-à-dire qu'un grand ensemble de données peut être adéquatement décrit au moyen d'une seule statistique sommaire ou d'une combinaison de statistiques. Par exemple, les élèves pourraient chercher à savoir si le meilleur sommaire d'un ensemble de données résulte de la moyenne, de la médiane ou du mode seulement, ou encore de l'étendue et de la moyenne, de l'étendue et de la médiane ou de l'étendue et du mode.

Un glossaire est annexé à la fin de l'ouvrage pour permettre au lecteur de bien comprendre les expressions mathématiques qui lui sont peut-être moins familières. Il représente également une bonne source de référence à toute étape de l'enseignement de la mathématique.

S'il est vrai que le présent ouvrage vise essentiellement à aider les enseignants à comprendre la mathématique et à expliquer la matière au moyen de grandes idées, il prend aussi en compte d'autres considérations pédagogiques importantes, dont les suivantes :

- le recours à des représentations pertinentes, et multiples, de concepts mathématiques ;
- le rôle de la manipulation pour rendre la mathématique utile aux élèves ;
- l'importance des solutions multiples ;
- l'utilité et l'éventail possible des méthodes personnelles et des algorithmes inventés ;
- l'importance d'un enseignement conceptuel.

Les régularités et l’algèbre

CHAPITRE 1

Les régularités

Les élèves commencent à étudier les régularités au début de l’école primaire. À partir des études secondaires, bien que l’accent soit plutôt mis sur l’algèbre, une certaine attention est toujours portée aux régularités.

Connaître les grandes idées peut aider les enseignants à choisir, adapter et créer des tâches, ainsi qu’à formuler des questions qui vont amener les élèves à établir des liens très utiles entre les notions.

GRANDES IDÉES SUR LES RÉGULARITÉS (GIR)

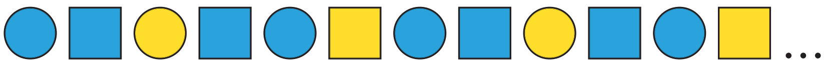
1. Les suites représentent des régularités bien définies. Il existe toujours une certaine règle, qui concerne soit quelques éléments, soit une « transformation », pouvant consister à ajouter 1, par exemple. (GIR 1)
2. Toute régularité peut être représentée de diverses façons. (GIR 2)
3. Certaines façons de disposer des données mettent en relief des régularités et des relations. (GIR 3)
4. L’utilisation des régularités permet de simplifier un grand nombre de calculs, ainsi que la représentation de mesures et d’attributs géométriques comportant des nombres (par exemple, le nombre de sommets ou de faces des différents prismes). (GIR 4)

Dans chaque rubrique En pratique de la présente section, la ou les grandes idées sur les régularités (GIR) qui peuvent être mises en relief sont précisées.

Les types de régularités

Les suites à motif répété

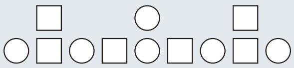
L’apprentissage des suites à motif répété qui comprennent plus d’un attribut est approprié pour les élèves de 9 à 14 ans. Par exemple, la suite présentée ci-dessous concerne tant les figures que les couleurs. Il est à noter que les couleurs relèvent d’une suite AAB (bleu, bleu, jaune), tandis que les figures correspondent à une suite AB (cercle, carré).



Suite à plusieurs attributs portant sur les figures et les couleurs : AB pour les figures et AAB pour les couleurs.

1.1 EN PRATIQUE

Demandez aux élèves de créer une suite de figures où le nombre de figures dans chaque terme présente une suite ABA, mais où les termes eux-mêmes constituent une suite AB, comme :



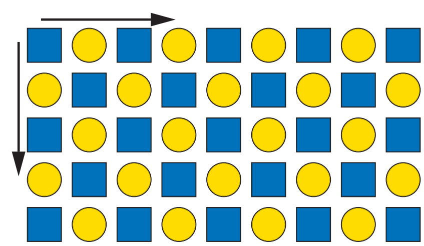
1, 2, 1, 1, 2, 1, ...
cercle, carré, cercle, carré, ...

Introduisez la GIR 1 en posant les questions suivantes : Qu’est-ce qui en fait une suite ? Si je changeais cette figure, serait-ce encore une suite ?

Ce qui rend ce type de suite plus approprié pour les élèves de 9 à 14 ans, plutôt que pour les élèves plus jeunes, c'est le fait que les deux attributs sont régis par des motifs répétés différents l'un de l'autre. Les élèves plus jeunes ou ceux ayant des difficultés d'apprentissage sont plus susceptibles de bien comprendre les suites à deux attributs lorsque ces derniers sont régis par une même règle. Par exemple :

Suite à plusieurs attributs portant sur les figures et les couleurs.
Tant les figures que les couleurs relèvent d'une suite AB.

Les élèves de 9 à 14 ans sont également plus aptes à interpréter des suites qui vont dans plus d'un sens, comme dans l'exemple ci-dessous. Ce type de suite est couramment présent dans la vie courante.



Suite de figures et de couleurs

1.2 EN PRATIQUE

Énumérez plusieurs termes (mais pas tous) d'une suite, sauf le premier, comme dans l'exemple ci-dessous. Dites aux élèves que, dans chaque cas, les termes sont additionnés ou soustraits du même nombre chaque fois. Les élèves peuvent alors se servir des termes donnés pour déterminer les termes manquants.

__, __, 9, __, __, 15, __
[5, 7, 9, 11, 13, 15, 17]

ou

__, 36, __, 28, __, 20
[40, 36, 32, 28, 24, 20]

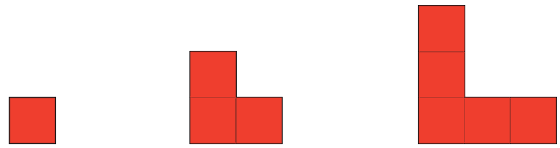
Lorsque les élèves ont terminé, posez-leur les questions suivantes : Comment avez-vous déterminé la règle de soustraction chaque fois ? Pourquoi avez-vous dû faire des additions et des soustractions ?

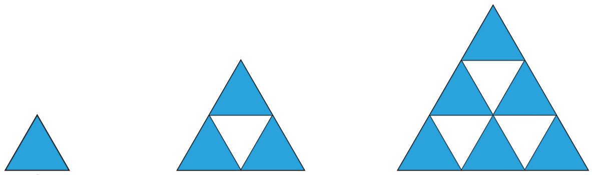
Les suites croissantes et décroissantes

Certaines suites croissantes sont assez bien connues des élèves, notamment la suite 1, 2, 3, 4, … À mesure que les enfants acquièrent des notions de mathématiques, ils peuvent observer d'autres suites croissantes (ou décroissantes). Il peut s'agir :

- de suites arithmétiques, où chaque terme est plus élevé ou moins élevé que le précédent selon un nombre fixe
  3, 5, 7, 9, … (additionner 2)
  12, 10, 8, 6, … (soustraire 2) ;
- de suites géométriques, où chaque terme est un multiple fixe du précédent
  2, 4, 8, 16, … (multiplier par 2)
  100, 20, 4, … (diviser par 5 ou multiplier par $\frac{1}{5}$) ;
- d'autres suites numériques où la croissance (ou la diminution) n'est pas constante
  3, 4, 6, 9, 13, … (additionner 1 de plus chaque fois)
  20, 18, 14, 8, … (soustraire 2 de plus chaque fois).

Les élèves sont généralement capables de reconnaître et de prolonger des suites arithmétiques avant d'être à l'aise avec les autres types de suites croissantes ou décroissantes, parce que les progressions arithmétiques se fondent simplement sur l'addition ou la soustraction d'un même nombre chaque fois. Il y a aussi des suites à motif croissant comme le montrent les exemples suivants.





Certaines suites à motif croissant peuvent être vues comme des suites numériques.

Ces suites à motif croissant peuvent souvent être représentées et décrites comme des suites numériques croissantes : 1, 3, 5, … et 1, 4, 9, … Il est à noter que chaque progression croissante ou décroissante comporte une règle d'augmentation ou de diminution, ce qui précisément en fait une régularité.

Il faut se rappeler que les élèves éprouvent généralement plus de difficulté avec les suites décroissantes qu'avec les suites croissantes. Il s'ensuit peut-être que nous devons leur consacrer plus de temps que nous le faisons actuellement.

Les suites récursives

Une suite récursive se caractérise par le fait que chacun de ses éléments est défini en fonction d'un ou de plusieurs éléments précédents. Certaines des suites croissantes décrites précédemment peuvent être considérées comme des suites récursives. Par exemple, dans la suite 2, 4, 6, 8, …, chaque terme est plus grand de 2 que le précédent. Toutefois, certaines suites récursives s'avèrent plus complexes, à l'exemple de 2, 3, 6, 18, 108, …, où chaque terme est défini comme le produit des deux termes précédents.

Voici quelques suites récursives bien connues :

- les nombres triangulaires : à partir de 1, chaque terme s'obtient en ajoutant 1 de plus que ce qui avait été ajouté précédemment, soit 1, 3, 6, 10, 15, … (commencer à 1, ajouter 2, puis 3, puis 4, puis 5, …) ;
- la suite de Fibonacci : à partir de 1 et 1, chaque terme s'obtient en additionnant les deux précédents, soit 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … (commencer avec 1 et 1, additionner les deux premiers termes pour obtenir le 3^{e}, puis additionner les 2^{e} et 3^{e} termes pour obtenir le 4^{e}, puis additionner les 3^{e} et 4^{e} termes pour obtenir le 5^{e}, …).

Prolonger les suites et décrire les régularités

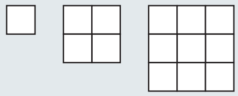
Prolonger les suites

Lorsque les élèves ont reconnu une suite, vous leur demandez normalement de la prolonger ou de la décrire pour vérifier leur compréhension. Il est souvent plus facile pour les élèves de prolonger une suite que de la décrire.

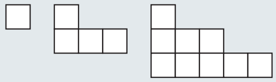
1.3 EN PRATIQUE

Il y a beaucoup de façons intéressantes d'illustrer la suite 1, 4, 9, …, y compris

- une suite de carrés de taille croissante, comme ci-dessous :



- une suite en escalier :



Montrez les deux suites. Expliquez aux élèves qu'il y a différentes façons de représenter la même suite (GIR 2). Une représentation est axée sur le fait que les termes sont des nombres carrés, alors que l'autre souligne la somme de nombres impairs croissants. Demandez aux élèves de trouver une autre représentation [par exemple, la suite de triangles à la droite].

Présentez la GIR 3 en leur posant les questions suivantes : Quelle suite vous laisse penser que les termes sont liés par une multiplication ? Par une addition ? Pourquoi ? [Carrés : je vois 1 × 1, 2 × 2 et 3 × 3 ; triangles et escaliers : je vois +3, +5.]

Les opérations avec des nombres naturels

Pendant qu'ils consolident leur compréhension de l'addition et de la soustraction (au cœur de la mathématique étudiée avec les élèves de 5 à 9 ans), les élèves de 9 à 14 ans s'efforcent d'approfondir davantage leur compréhension de la multiplication et de la division. Pour assurer cette compréhension, ils doivent savoir à quel moment une multiplication ou une division est nécessaire et pouvoir utiliser diverses stratégies de multiplication et de division.

GRANDES IDÉES **SUR LES OPÉRATIONS AVEC DES NOMBRES NATURELS (GIONN)**

1. De nombreuses situations nécessitent le recours à une opération, et chaque opération peut être réalisée à l'aide de processus ou d'algorithmes. (GIONN 1)
2. Un algorithme personnel « inventé » est souvent plus utile et parfois aussi efficace qu'un algorithme traditionnel. (GIONN 2)
3. Les processus à utiliser pour une opération doivent être expliqués de façon efficace, compte tenu des divers sens des opérations à effectuer et des principes sous-tendant leur emploi. Les explications données sont plus faciles à comprendre grâce à des manipulations concrètes et à des représentations imagées. (GIONN 3)
4. Il existe diverses façons appropriées d'estimer une somme, une différence, un produit ou un quotient, selon les nombres concernés et leur contexte. (GIONN 4)

Dans chaque rubrique En pratique de la présente section, la ou les grandes idées sur les opérations avec les nombres naturels (GIONN) qui peuvent être mises en relief sont précisées.

Les principes et les sens de la multiplication et de la division

SENS DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION SELON L'ÂGE DES ÉLÈVES

La multiplication, avec les élèves de 5 à 9 ans	La division, avec les élèves de 5 à 9 ans
Les élèves apprennent les sens suivants. • L'addition répétée Par exemple, 3 + 3 + 3 + 3 = 4 × 3 = 12. • Les groupes équivalents Par exemple, 4 groupes de garçons qui en comprennent 3 chacun réunissent 12 garçons : 4 × 3 = 12. • La disposition rectangulaire Par exemple, un ensemble de 4 rangées comprenant 3 timbres chacune regroupe 12 timbres : 4 × 3 = 12.	Les élèves apprennent les sens suivants. • La soustraction répétée Par exemple, 12 – 4 – 4 – 4 = 0 → 12 ÷ 4 = 3. • Les groupes équivalents Par exemple, si 12 garçons sont répartis en groupes de 4, il y a 3 groupes : 12 ÷ 4 = 3. • Le partage égal Par exemple, si 12 garçons sont répartis en 4 groupes, il y a 3 garçons dans chaque groupe : 12 ÷ 4 = 3. • La disposition rectangulaire Par exemple, un ensemble de 12 timbres répartis en 4 rangées comporte 3 colonnes : 12 ÷ 4 = 3.

2.16 EN PRATIQUE

Donnez des problèmes de combinaison comme celui-ci.

Il y a deux types de pain (pain blanc [B] et pain de grains [G]) et trois types de fromage (cheddar [C], suisse [S] et mozzarella [M]). De combien de façons peut-on combiner ces ingrédients pour faire des sandwichs différents ?

Pour aider les élèves à y voir une situation de multiplication (GIONN 1), vous pouvez leur poser la question suivante : Comment pourriez-vous montrer que les différentes combinaisons pain-fromage constituent des groupes égaux ? [Par exemple : 1 groupe de 3 sandwichs, soit B-C, B-S, B-M, et un autre groupe de 3 sandwichs, soit G-C, G-S, G-M.]

Reconnaître les différents sens aide les élèves à résoudre un plus large éventail de problèmes. Savoir reconnaître la relation entre un taux et une multiplication ainsi qu'entre une division et des fractions est particulièrement important pour les élèves de 11 à 14 ans.

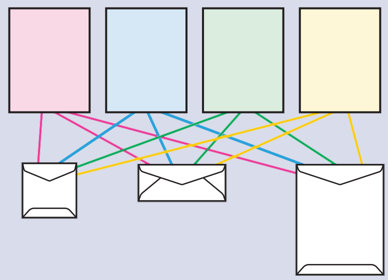
SENS DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION SELON L'ÂGE DES ÉLÈVES (*suite*)

La multiplication, avec les élèves de 9 à 14 ans

Les élèves de 9 à 14 ans élargissent leur compréhension de la multiplication pour qu'elle englobe les sens suivants.

Combinaisons

3 × 4 est le nombre de combinaisons possibles papier-enveloppe, lorsqu'il y a 3 types d'enveloppe et 4 couleurs de papier.



3 × 4 = 12

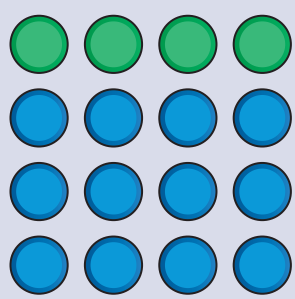
3 types d'enveloppe et 4 couleurs de papier donnent 12 combinaisons différentes papier-enveloppe.

Taux

3 × 4 représente le nombre de crayons que possède Pascal, si Mia en a 4 et que Pascal en possède 3 fois plus.

Mia

Pascal



3 × 4 = 12

Selon un taux 3 fois supérieur, Pascal a 12 crayons, et Mia en possède 4.

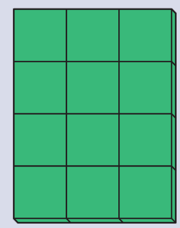
La division, avec les élèves de 9 à 14 ans

Les élèves de 9 à 14 ans élargissent leur compréhension de la division pour qu'elle englobe les sens suivants.

Aire d'un rectangle

12 ÷ 4 représente la largeur d'un rectangle ayant une aire de 12 unités carrées et une longueur de 4 unités.

L'aire est de 12 unités carrées.

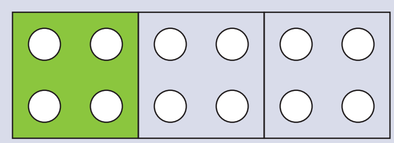


4 unités de long

12 ÷ 4 = 3 unités de large

Fractions

12 ÷ 3 représente le nombre d'objets que l'on a lorsque l'on divise 12 objets en tiers.



4 équivaut à $\frac{1}{3}$ de 12.

Les principes de la multiplication et de la division

Les élèves doivent se familiariser suffisamment avec différents principes de la multiplication et de la division pour pouvoir les utiliser sans difficulté. Dans le cadre des explications relatives à ces principes qui sont données au fil des pages suivantes, différents sens de la multiplication et différentes représentations sont fournis chaque fois. Il arrive souvent que le sens d'une opération soit beaucoup plus utile qu'un autre pour expliquer une idée précise.

LES PRINCIPES DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION

1. La multiplication et la division s'annulent l'une l'autre. Ce sont des opérations inverses, c'est-à-dire que si 12 ÷ 3 = 4, alors 3 × 4 = 12.
2. On peut multiplier des nombres dans n'importe quel ordre (la commutativité). Toutefois, dans le cas de la division, l'ordre dans lequel on divise des nombres est important.
3. Pour multiplier deux nombres, on peut diviser un facteur et multiplier l'autre par la même valeur sans modifier le produit (l'associativité), par exemple : 8 × 3 = (8 ÷ 2) × (3 × 2) = 4 × 6.
4. Pour diviser deux nombres, on peut multiplier ou diviser ces deux nombres par la même valeur sans modifier le quotient, par exemple : 15 ÷ 3 = (15 × 2) ÷ (3 × 2) = 30 ÷ 6.
5. On peut multiplier par étapes (la distributivité), par exemple : 5 × 4 = 3 × 4 + 2 × 4.
6. On peut multiplier par étapes en décomposant le multiplicande, par exemple : 6 × 5 = 2 × 3 × 5.
7. On peut diviser par étapes en décomposant le dividende en plusieurs parties, mais pas le diviseur (la distributivité), par exemple : 48 ÷ 8 = 32 ÷ 8 + 16 ÷ 8.
8. On peut diviser en décomposant le diviseur, par exemple : 36 ÷ 6 = 36 ÷ 3 ÷ 2.
9. Le produit d'une multiplication par 0 est 0.
10. Le quotient d'une division de 0 par un autre nombre est 0.
11. On ne peut pas diviser par 0.
12. Lorsque l'on multiplie ou divise un nombre par 1, la réponse est toujours égale au nombre de départ.

Des mathématiciens ont attribué un nom à certaines propriétés, notamment la commutativité, l'associativité et la distributivité (qui figurent dans la liste).

1er PRINCIPE

La multiplication et la division s'annulent l'une l'autre. Ce sont des opérations inverses.

La multiplication et la division sont des opérations inverses : l'une annule l'autre. En fait, la division est définie comme l'opération inverse de la multiplication. Si l'on a 12 objets au départ et qu'on les partage entre 3 personnes, chacune d'elles reçoit 4 objets. Comment revient-on à la situation de départ (12 objets) ? On se représente les 3 personnes, qui ont 4 objets chacune, comme une situation de multiplication, ou 3 groupes de 4, ce qui donne 12.

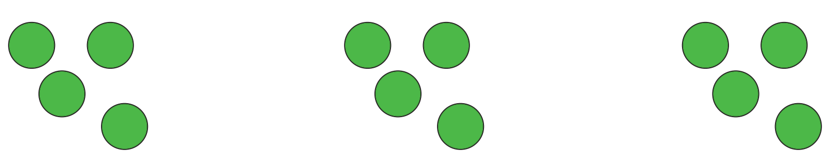
2.17 EN PRATIQUE

Pour attirer l'attention des élèves sur la relation entre la multiplication et la division (GIONN 1), posez-leur la question suivante : Je partage 24 biscuits avec 3 autres personnes. Quelle multiplication pourrais-je faire pour déterminer le nombre de biscuits que j'obtiendrais ? [Puisque 4 × 6 = 24, alors 24 ÷ 4 = 6]

2e PRINCIPE

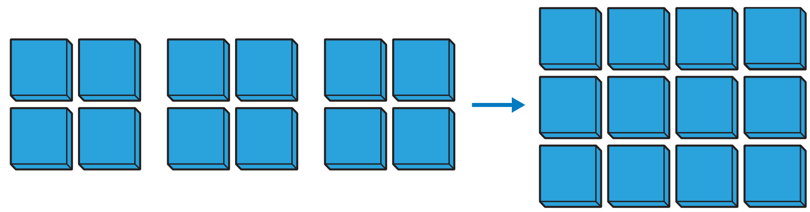
On peut multiplier des nombres dans n'importe quel ordre (la commutativité). Toutefois, dans le cas de la division, l'ordre dans lequel on divise des nombres est important.

Si l'on représente 3 groupes de 4 comme dans l'illustration ci-dessous, on ne voit pas clairement pourquoi c'est la même chose que 4 groupes de 3.



3 groupes de 4 équivalent à 3 × 4 = 12.

Mais si l'on dispose les 12 objets pour former un ensemble, on voit alors clairement pourquoi $3 \times 4 = 4 \times 3$.



3 groupes de 4 équivalent à 3 × 4 = 12.

3 rangées de 4 = 12 3 × 4 = 12
4 colonnes de 3 = 12 4 × 3 = 12

Modeler pour expliquer la commutativité de la multiplication.

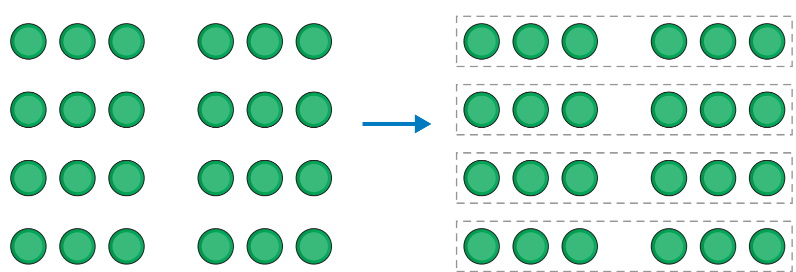
Toutefois, l'ordre utilisé est important dans le cas de la division. Par exemple, si l'on divisait 12 objets en groupes de 3, on obtiendrait 4 groupes de 3. Si l'on divisait 3 objets en groupes de 12, on n'obtiendrait même pas un groupe complet. Alors, $12 \div 3 \neq 3 \div 12$.

3^e PRINCIPE

Pour multiplier deux nombres, on peut diviser un facteur et multiplier l'autre par la même valeur sans modifier le produit (l'associativité).

L'associativité de la multiplication indique que, pour effectuer $a \times b \times c$, on peut multiplier $a \times b$ puis multiplier le produit par c, ou multiplier $b \times c$ puis multiplier le produit par a. Par exemple, $4 \times 2 \times 3 = 8 \times 3$ ou 4×6. L'associativité est efficace puisque la multiplication est définie uniquement pour deux nombres et que des règles ont dû être formulées pour vous permettre de traiter plus de deux nombres.

L'illustration ci-dessous présente 8 groupes de 3 (8×3). Si l'on associe des groupes de 3, on obtient 6 objets dans chaque groupe (deux fois plus dans chaque groupe), mais seulement 4 groupes (deux fois moins de groupes), tandis que le nombre total d'objets demeure le même ($8 \times 3 = 4 \times 6$).



8 groupes de 3

4 groupes de 6

$8 \times 3 = 4 \times 6$

8 groupes de 3 peuvent être considérés comme 4 groupes de 6 (la propriété de l'associativité de la multiplication).

2.18 EN PRATIQUE

Pour attirer l'attention des élèves sur les nombreuses façons de diviser (GIONN 1), demandez-leur de résoudre le problème suivant de trois façons différentes.

Il y a 32 crayons et 8 groupes d'élèves. Combien y aura-t-il de crayons dans chaque groupe ? [Par exemple :

$32 \div 8 = ? \longrightarrow 8 \times ? = 32 \longrightarrow 8 \times 4 = 32$, alors $32 \div 8 = 4$;

$32 \div 8 = 16 \div 4 = 4$;

$32 \div 8 = 32 \div 2 \div 2 \div 2 = 4$]

4^e PRINCIPE

Pour diviser deux nombres, on peut multiplier ou diviser ces deux nombres par la même valeur sans modifier le quotient.

Par exemple, $15 \div 3$ signifie de calculer combien chaque personne obtient si 3 personnes se partagent également 15 objets. Il est logique de penser que, s'il