

Introduction

Une collègue qui travaille dans le domaine des mathématiques du niveau secondaire a tenu à nous dire à quel point ses élèves répondaient bien à la présentation d'une simple illustration qui évoque la pensée mathématique sans qu'elle ait besoin d'employer un manuel ou des activités compliquées. Ce témoignage nous a fait réfléchir au riche potentiel d'un ouvrage axé sur la présentation de concepts mathématiques à l'aide d'illustrations, et ce, à tous les niveaux scolaires.

Structure de l'ouvrage

En premier lieu, le contexte expose plusieurs recherches portant sur la valeur de la représentation visuelle des concepts ou des processus mathématiques. Il porte également sur l'importance de poser des questions qui suscitent une discussion et, de là, une compréhension approfondie des concepts ou des processus présentés.

Par la suite, les 83 activités commencent toutes par une ou plusieurs illustrations suivies d'une question ou d'une consigne portant sur l'un des thèmes mathématiques définis pour des élèves de divers niveaux scolaires, qui sont également précisés. L'objectif est ici d'aider l'enseignant à créer un environnement mathématique riche à l'aide d'illustrations conçues avec soin pour stimuler la réflexion des élèves sur des concepts ou des processus mathématiques. Même si, dans certains cas, les aides visuelles peuvent paraître semblables aux outils que les éducateurs connaissent déjà, l'association illustration-questionnement favorise une compréhension plus précise et plus signifiante des concepts ou des processus véhiculés par ces illustrations que toute autre approche utilisée.

Toutes les illustrations de l'ouvrage peuvent être téléchargées et imprimées en couleurs à partir du site Web de l'éditeur (*voir l'adresse à l'intérieur de l'ouvrage imprimé*). On peut les projeter en classe ou les distribuer aux élèves et s'en servir comme base pour animer de riches discussions sur les mathématiques. Quant à l'ouvrage imprimé, il offre du soutien aux enseignants lors de ces échanges mathématiques, en :

- clarifiant le concept ou le processus mathématique que l'illustration tend à faire ressortir ;
- expliquant l'importance de ce concept ou de ce processus mathématique ;
- démontrant le lien qui unit ce concept ou ce processus mathématique aux autres apprentissages mathématiques ;
- exposant précisément pourquoi l'illustration est susceptible d'évoquer le concept ou le processus mathématique recherché ;
- leur proposant des questions complémentaires ainsi qu'une explication pour chacune d'elles afin de les aider à soutenir l'apprentissage et la compréhension des concepts fondamentaux par leurs élèves ;

- présentant des activités d’approfondissement, lesquelles invitent les élèves à faire un dessin, à utiliser du matériel de manipulation ou à produire de quelque autre façon un exemple lié au concept ou au processus à l’étude. Ces activités d’approfondissement peuvent être utilisées pour renforcer, chez les élèves, la compréhension d’un nouvel apprentissage, pour aider les enseignants à évaluer la compréhension des élèves ou les deux.

Utilisation de l’ouvrage avec d’autres ressources

Les activités présentées constituent un excellent complément au manuel ou au matériel qu’utilisent les enseignants. Ces derniers pourront consulter la table des matières et le tableau de corrélation en vue d’explorer les différentes notions mathématiques selon la matière à l’étude et le niveau scolaire de leurs élèves. Les illustrations présentées et les questions complémentaires associées permettent d’introduire un concept ou un processus mathématique alors que d’autres serviront d’activités d’enrichissement ou d’exploration¹. En lisant la question liée à l’illustration, l’enseignant sera à même de déterminer le meilleur moment pour présenter telle ou telle activité. Les illustrations, enfin, aideront de nombreux enseignants à décider sur quels éléments axer leurs questions à propos d’un concept ou d’un processus donné, ainsi qu’à reconnaître les concepts clés sur lesquels il convient de mettre l’accent.

Utilisation de l’ouvrage pour un enseignement différencié et pour faire le pont entre les niveaux scolaires

La nature des activités proposées aidera les enseignants qui souhaitent différencier leur enseignement. Dans bien des cas, les questions sont suffisamment ouvertes pour donner lieu à des échanges enrichissants, et ce, tant avec les élèves en difficulté qu’avec les élèves plus avancés. Plusieurs questions conviennent à plus d’un niveau scolaire, à la seule différence que les réponses sont de plus en plus pointues à mesure que le niveau scolaire augmente. Finalement, les enseignants seront en mesure de faire le pont entre les mathématiques de leur niveau scolaire et celles des niveaux scolaires inférieurs et supérieurs.

Création de ses propres illustrations

Les illustrations et les questions fournies pourront inciter les enseignants à créer leur propre matériel. Il suffit alors de déterminer un concept ou un processus mathématique à explorer, de réfléchir aux aspects de ce concept (ou de ce processus) pouvant être illustrés, puis de penser aux questions les plus susceptibles de favoriser une belle discussion de groupe.

Prenons, par exemple, la notion selon laquelle multiplier un nombre par 2 équivaut à lui additionner sa propre valeur. Les concepts associés à mettre en relief concernent le sens des opérations de multiplication et d’addition, et le fait que cette règle est avérée, peu importe le nombre choisi. La discussion

1. Dans le cas, notamment, des notions dépassant le programme québécois de mathématiques du primaire.

pourrait être lancée par une illustration présentant deux ensembles identiques constitués de 6 objets, deux ensembles identiques constitués de 10 objets et deux sacs identiques dans lesquels se trouve un certain nombre, inconnu, mais très grand, de petits objets, le même nombre pour les deux sacs. La principale question associée à cette illustration pourrait être : Quelles situations ces illustrations représentent-elles ? Comment les traduire par une phrase mathématique ? Celle-ci présentera-t-elle une addition ou une multiplication ? Quant aux questions complémentaires, elles devraient faire ressortir les raisons qui font affirmer, par certains, que les illustrations montrent une multiplication et, par d'autres, une addition. Elles devraient aussi faire valoir qu'il n'est pas nécessaire de connaître le nombre d'objets contenus dans les sacs, si l'on tient pour acquis qu'ils sont identiques, pour déterminer si la phrase mathématique en sera une d'addition ou de multiplication.

Le contexte

Le présent ouvrage se base sur deux corpus de recherche, l'un axé sur le rôle primordial de la visualisation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques; l'autre sur l'importance de s'assurer que les élèves comprennent très bien les concepts et les processus mathématiques qu'ils sont appelés à maîtriser.

La visualisation en mathématiques

Lorsque les enfants sont encore jeunes, nous nous servons de livres d'images non seulement pour leur montrer le pouvoir du livre ainsi que l'importance de savoir lire et la joie que cela procure, mais également parce que les images constituent un outil puissant qui nous aide à donner un sens au monde qui nous entoure. D'ailleurs, Adams et Victor (1993) avancent que la vision représente la plus importante source d'information sur le monde. À cet égard, les liens étroits que nous entretenons avec les nouvelles technologies, notamment avec la tablette numérique, indiquent que nous sommes devenus une culture hautement visuelle, où l'image graphique a commencé à supplanter le message imprimé quant à notre manière privilégiée d'explorer le monde qui nous entoure.

Sadoski et Paivio (2001) ont démontré le rôle crucial de la visualisation dans la lecture et il paraît raisonnable de penser qu'il en va de même pour le développement de la pensée mathématique.

Edward R. Tufte (2001) est un autre chercheur qui s'est penché sur la puissance de l'imagerie visuelle. Bien que ses recherches portent principalement sur la force de la présentation visuelle des données statistiques, il est tout de même possible d'appliquer ses idées à d'autres aspects des mathématiques.

Par exemple, comparez la puissance de l'explication visuelle de $3 \times 4 = 4 \times 3$ à la démonstration mathématique suivante.

Explication visuelle de la propriété de commutativité de la multiplication selon laquelle, par exemple, $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Je vois 3 rangées de 4 bananes, mais je vois également 4 colonnes de 3 bananes.

Comme $m \times n$ représente m groupes de n objets, je vois à la fois 3×4 et 4×3 en observant un seul et même ensemble.



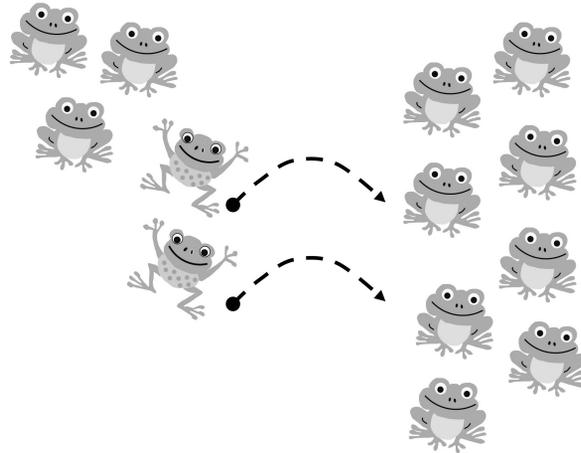
Démonstration de la propriété de commutativité de la multiplication selon laquelle, par exemple, $3 \times 4 = 4 \times 3$.

$$\begin{aligned} 3 \times 4 &= 4 + 4 + 4 \\ &= 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 \\ &= 3 + 3 + 3 + (1 + 1 + 1) \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 4 \times 3 \end{aligned}$$

Activité 17 L'addition : modifier les termes sans changer la somme

Niveaux
scolaires

- Québec et provinces de l'Est : 2^e et 3^e années
- Ontario et provinces de l'Ouest et du Nord canadien : 1^{re} et 2^e années



**En quoi les phrases mathématiques qui décrivent l'ensemble des grenouilles sont-elles semblables après le déplacement des deux grenouilles ?
En quoi sont-elles différentes ?**



Présentation du concept ou du processus

De nombreuses paires de nombres peuvent être additionnées et donner la même somme. En analysant ces paires, il apparaît clairement que si l'un des termes augmente, le second diminue dans la même mesure. Il s'agit là d'un exemple de l'associativité de l'addition². Par exemple : $9 + 2 = 7 + 4$. Remarquez qu'étant donné que le premier terme diminue de 2 unités, le second augmente de 2. En somme, les éléments sont divisés en deux ensembles et les éléments du premier ensemble passent dans le second ensemble.

Un autre outil qui peut s'avérer utile afin de démontrer cette propriété est la table d'addition. Les nombres qui forment la diagonale traversant la table du coin inférieur gauche au coin supérieur droit sont tous égaux. Prenez par exemple la diagonale « 5 ». Ce nombre est le résultat des additions suivantes : $4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 3 = 1 + 4$. On peut facilement observer que l'un des termes de l'addition diminue tandis que l'autre augmente de la même valeur. Le nombre « 4 » devient « 3 » pendant que le nombre « 1 » devient « 2 » ; le nombre « 3 » devient « 2 » pendant que le nombre « 2 » devient « 3 », etc. :

2. Note de l'adaptatrice : La propriété d'associativité de l'addition est une notion prévue au programme du 2^e cycle du primaire. La présente activité permet d'en apprivoiser le concept.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Les questions portant sur l'association des termes additionnés dans une même somme devraient porter principalement sur les raisons qui expliquent pourquoi et comment modifier ces termes afin de simplifier le calcul de la somme. Par exemple, savoir que $8 + 5 = 10 + 3$ rend ce calcul bien plus facile. Dans les deux cas, la somme demeure la même, car des éléments ne font que se déplacer d'un ensemble à l'autre; le total ne change jamais.

L'illustration présentée au début de l'activité met l'accent sur le fait que l'un des termes diminue dans la même mesure que le second augmente, qu'il s'agit tout simplement d'une réorganisation des quantités et que le total ne change jamais.

Questions complémentaires

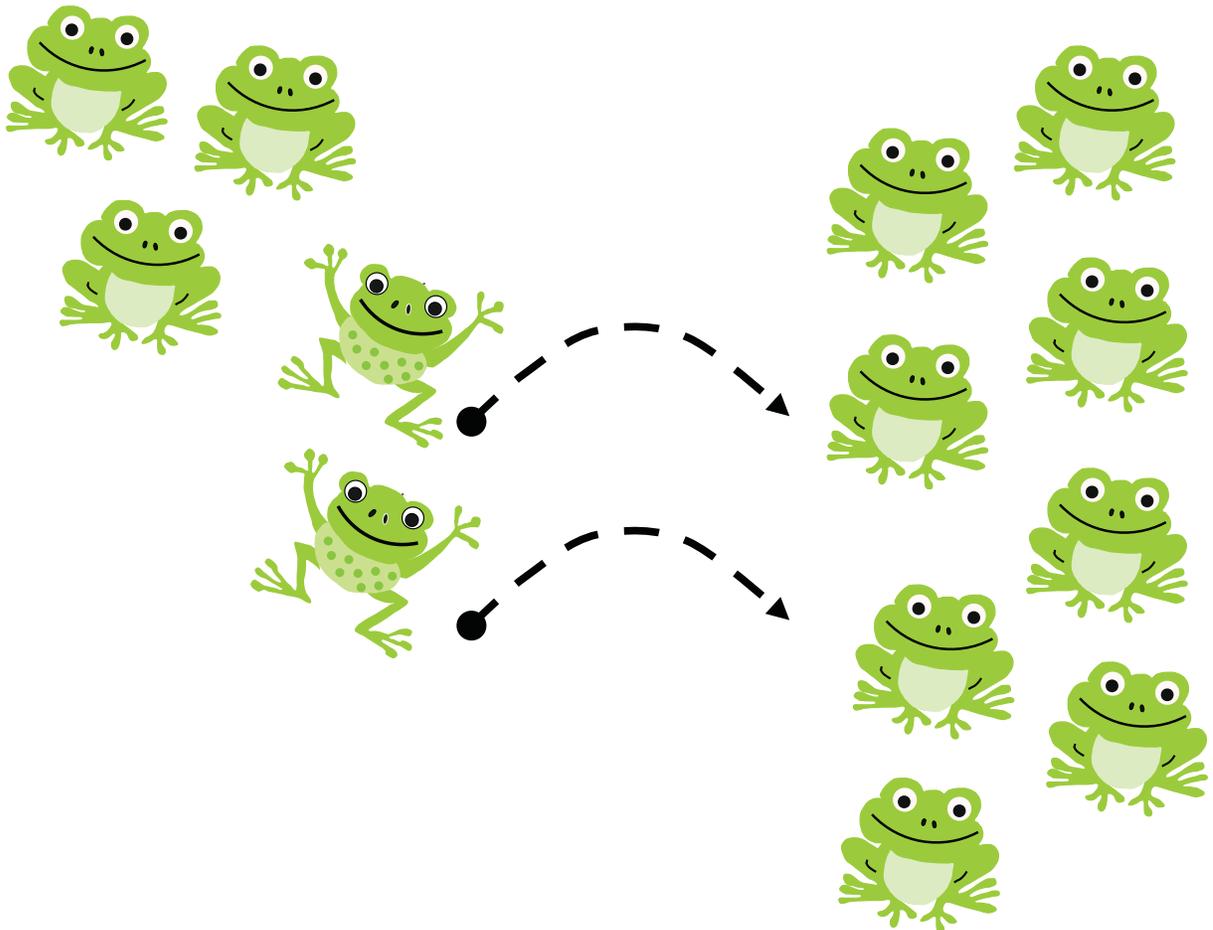
Autres questions associées à l'illustration à inclure dans une conversation portant sur celle-ci :

- **En quoi la phrase mathématique serait-elle différente si 4 grenouilles avaient changé de côté?** (Nous voulons que les élèves prennent conscience que le premier terme diminuerait de 4 au lieu de 2 et que le second augmenterait de 4 unités au lieu de 2. La somme demeurerait la même.)
- **Pourquoi la somme est-elle la même dans les deux phrases mathématiques?** (Nous voulons que les élèves prennent conscience que le nombre total de grenouilles ne change pas, que même si les éléments de l'ensemble changent, ce dernier, donc la somme, demeure inchangé.)
- **Dans l'addition, quel nombre a diminué et de combien? Quel nombre a augmenté, et de combien?** (Nous voulons que les élèves remarquent que l'augmentation de l'un des termes correspond à la diminution de l'autre.)
- **Pourquoi les phrases mathématiques $5 + 8$ et $3 + 10$ donnent-elles la même réponse? En quoi pourrait-il être utile de remplacer $5 + 8$ par $3 + 10$?** (Nous voulons que les élèves découvrent pourquoi il est utile de remplacer ces deux termes, et qu'il est plus rapide de calculer cette addition de cette façon, à l'aide d'un tableau des nombres de 1 à 100 par exemple. Cette façon de faire facilite le calcul mental.)

Approfondissement

Demandez aux élèves de dresser une liste de phrases mathématiques différentes pour obtenir une somme de 14, puis d'expliquer ce qu'ils ont remarqué à propos des diverses possibilités qu'ils ont choisies.

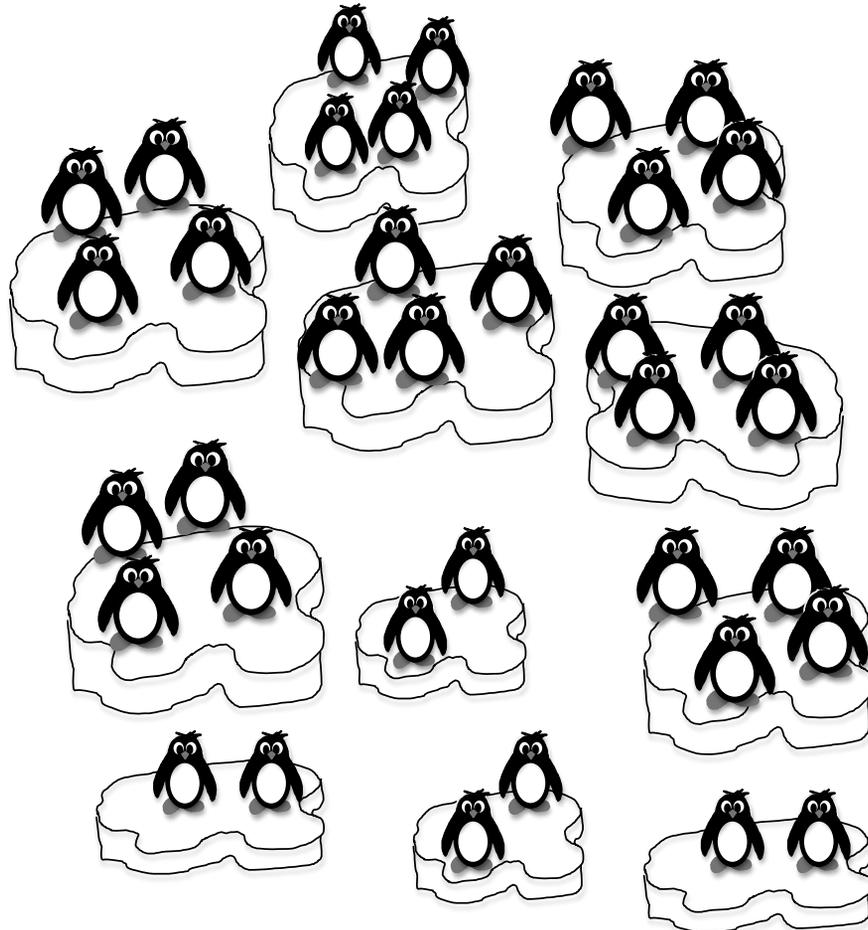
En quoi les phrases mathématiques qui décrivent l'ensemble des grenouilles sont-elles semblables après le déplacement des deux grenouilles ? En quoi sont-elles différentes ?



Activité 37 La multiplication comme la formation de groupes égaux (ou par addition répétée)

Niveaux scolaires

- Québec : 1^{re} à 4^e année
- Ontario : 2^e et 3^e années
- Provinces de l'Est, de l'Ouest et du Nord canadien : 3^e et 4^e années



Traduis cette situation par une phrase mathématique en utilisant le symbole de la multiplication (\times).



Présentation du concept ou du processus

Au 1^{er} cycle du primaire, la multiplication est présentée aux élèves, entre autres, comme une addition répétée de groupes égaux, la plupart du temps déjà constitués. Ici, on peut reformer des groupes égaux pour les compter. Cette action est essentielle non seulement parce qu'elle favorise la compréhension même du sens de l'opération, mais aussi parce qu'elle amène les élèves à composer et à décomposer des nombres, et à effectuer ainsi des calculs plus efficaces.

Dans l'illustration présentée au début de l'activité, la plupart des groupes, mais pas tous, sont égaux. Toutefois, il est possible de réorganiser les groupes de 2 pour former des groupes de 4 ou encore de séparer les groupes de 4 en groupes de 2. Une discussion animée pourrait s'ensuivre si certains élèves insistent sur le fait que l'illustration ne représente pas une multiplication alors que d'autres voient la possibilité de réarranger les groupes. Remarquez combien les groupes de 4 et un nombre pair de groupes de 2 (lesquels peuvent former des groupes de 4) rendent la question plus intéressante que si tous les groupes étaient des groupes de 4 (donc une seule réponse logique) ou que s'il y avait de nombreux groupes de 4 et un nombre impair de groupes de 2 (les seuls groupes qu'il serait possible de former seraient des groupes de 2, et non des groupes de 2 ou de 4). En effet, les questions légèrement ambiguës donnent souvent lieu à des conversations mathématiques des plus intéressantes.

Questions complémentaires

Autres questions associées à l'illustration à inclure dans une conversation portant sur celle-ci :

- **Quand as-tu recours à la multiplication pour traduire une situation?** (Nous voulons connaître les différents sens de la multiplication que les élèves ont appris à reconnaître [addition répétée, disposition rectangulaire ou produit cartésien]. Nous ne nous attendons évidemment pas à ce qu'ils maîtrisent ces derniers termes.)
- **Les groupes de pingouins sont-ils tous de la même taille? Est-ce un facteur important lorsque tu dois décider si tu as recours à la multiplication?** (Nous voulons que les élèves remarquent la taille des groupes lorsqu'ils choisissent d'employer ou non la multiplication.)
- **Serait-il possible de regrouper les pingouins de façon différente pour former des groupes égaux?** (Nous voulons que les élèves remarquent que, dans certains cas, le fait de réorganiser les groupes change la façon dont nous les décrivons et puissent, de même, établir des relations d'égalité entre des expressions numériques. Par exemple, $7 + 9 = 8 + 8$. En «réorganisant» une phrase mathématique, on obtient l'addition d'un double, lequel nous facilite le calcul. Cette habileté sera développée tout au long du primaire.)

Approfondissement

Demandez aux élèves de faire un dessin présentant une autre situation de multiplication.

Traduis cette situation par une phrase mathématique
en utilisant le symbole de la multiplication (\times).

