

Calcul différentiel et vecteurs 12

MANUEL

VERSION FRANÇAISE DE
Calculus and Vectors 12

OFFERT EN ANGLAIS CHEZ MCGRAW-HILL RYERSON

TIRÉ À PART
Chapitre 1



AVIS AU LECTEUR

Nous désirons vous informer que cet extrait est une version provisoire et non la reproduction du produit final. Des éléments de contenu et des illustrations s'ajouteront à la version finale. De plus, il peut subsister quelques erreurs ou coquilles typographiques. Nous ferons les corrections nécessaires pour la version imprimée.

ISBN 978-2-7651-0538-1

©2009 Chenelière Éducation inc.
Tous droits réservés.

Toute reproduction, en tout ou en partie, sous quelque forme et par quelque procédé que ce soit, est interdite sans l'autorisation écrite préalable de l'Éditeur.

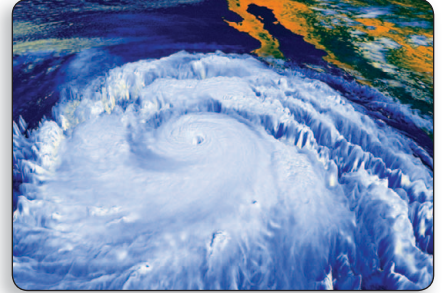


CHENELIÈRE ÉDUCTION

7001, boul. Saint-Laurent
Montréal (Québec)
Canada H2S 3E3
Téléphone : (514) 273-1066
Télécopieur : (514) 276-0324
info@cheneliere.ca

Les taux de variation

Notre monde est en perpétuel changement. Comprendre la nature du changement et le rythme auquel il se produit nous permet de faire des prévisions et de prendre des décisions importantes. Par exemple, les climatologues qui surveillent un ouragan mesurent la pression atmosphérique, l'humidité, la configuration des vents et les températures océaniques. Ces variables ont un effet sur la violence de la tempête. Le calcul différentiel joue un rôle important quand vient le temps de prédire l'évolution des tempêtes, puisque ces variables changent. De même, le calcul différentiel sert à analyser les variations qui se produisent dans de nombreux domaines, tels que les sciences physique et sociale, la médecine, le commerce et l'économie.



Après l'étude de ce chapitre, tu pourras :

- identifier des applications tirées de la vie courante faisant appel au taux de variation et reconnaître qu'il existe différentes façons de les représenter ;
- décrire le lien entre le taux de variation moyen d'une fonction continue sur un intervalle et la pente de la sécante du graphique de cette fonction, et le lien entre le taux de variation instantané d'une fonction continue en un point et la pente de la tangente du graphique de cette fonction en ce même point ;
- déterminer, à l'aide ou non d'outils technologiques, une valeur approximative du taux de variation instantané d'une fonction continue en un point de la courbe à l'aide du calcul d'une suite de taux de variation moyens se rapprochant de plus en plus de la tangente en ce point ;
- reconnaître et décrire graphiquement et numériquement des exemples de limite ;
- établir le lien entre le taux de variation moyen d'une fonction continue sur l'intervalle $a \leq x \leq a + h$ et la valeur de l'expression $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, et entre le taux de variation instantané d'une fonction en un point pour la valeur $x = a$ et la valeur de l'expression $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$;
- comparer par exploration le calcul du taux de variation instantané de fonctions polynômes en un point $(a, f(a))$ en évaluant le taux pour des valeurs de h qui tendent vers 0 à l'aide de l'expression $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, à la simplification de l'expression $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $x = a$ et ensuite en l'évaluant pour des valeurs de h qui tendent vers 0 ;
- générer par exploration, à l'aide d'outils technologiques, une table de valeurs indiquant le taux de variation instantané d'une fonction polynôme $f(x)$ pour différentes valeurs de x , représenter graphiquement les couples ordonnées $(x, f'(x))$, reconnaître que ce graphique représente la dérivée de la fonction donnée $f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$, et établir les liens entre les représentations graphiques de $f(x)$ et de $f'(x)$;
- déterminer la dérivée d'une fonction polynôme en simplifiant l'expression algébrique $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ et en évaluant la limite de l'expression simplifiée lorsque h tend vers 0.

Connaissances préalables

Les premières différences

1. Remplis le tableau ci-dessous pour la fonction définie par $y = x^2 + 3x + 5$.

- a) Que remarques-tu au sujet des premières différences ?
b) Que t'apprennent ces données sur la forme de la courbe ?

x	y	Première différence
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		

La pente d'une droite

2. Détermine la pente de la droite qui passe par chaque paire de points.

- a) $(-2, 3)$ et $(4, 1)$ b) $(3, -7)$ et $(0, -1)$
c) $(5, 1)$ et $(0, 0)$ d) $(0, 4)$ et $(-9, 4)$

La forme pente-ordonnée à l'origine de l'équation d'une droite

3. Récris chaque équation sous la forme pente-ordonnée à l'origine. Indique la pente et l'ordonnée à l'origine dans chaque cas.

- a) $2x - 4y = 7$ b) $5x + 3y - 1 = 0$
c) $-18x = 9y + 10$ d) $5y = 7x + 2$

4. Dans chaque cas, écris l'équation de la droite sous la forme pente-ordonnée à l'origine.

- a) La pente est 5 et l'ordonnée à l'origine est 3.
b) La droite passe par les points $(-5, 3)$ et $(1, 1)$.
c) La pente est -2 et le point $(4, 7)$ est sur la droite.
d) La droite passe par les points $(3, 0)$ et $(2, -1)$.

Le développement de binômes

5. À l'aide du triangle de Pascal, développe chaque binôme.

- a) $(a + b)^2$ b) $(a + b)^3$ c) $(a - b)^3$
d) $(a + b)^4$ e) $(a - b)^5$ f) $(a + b)^5$

La factorisation pour résoudre des équations

6. Factorise ces expressions.

- a) $2x^2 - x - 1$ b) $6x^2 + 17x + 5$
c) $x^3 - 1$ d) $2x^4 + 7x^3 + 3x^2$
e) $x^2 - 2x - 4$ f) $t^3 + 2t^2 - 3t$

La factorisation d'une différence de puissances

7. Utilise la régularité de la première rangée pour remplir le tableau pour chaque différence de puissances.

Différence de puissances	Forme factorisée
a) $a^n - b^n$	$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$
b) $a^2 - b^2$	
c)	$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
d) $a^4 - b^4$	
e) $a^5 - b^5$	
f) $(x + h)^n - x^n$	

Le développement de binômes

8. Développe et simplifie chaque différence de carrés.

- a) $(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$
b) $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$
c) $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$
d) $(\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x})(\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x})$

La simplification d'expressions rationnelles

9. Simplifie les expressions suivantes :

- a) $\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$
c) $\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}$ d) $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{h}$

La notation fonctionnelle

10. Détermine les points $(-2, f(-2))$ et $(3, f(3))$ pour chaque fonction.
- $f(x) = 3x + 12$
 - $f(x) = -5x^2 + 2x + 1$
 - $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3$
11. Pour chaque fonction, détermine $f(3 + h)$ sous forme simplifiée.
- $f(x) = 6x - 2$
 - $f(x) = 3x^2 + 5x$
 - $f(x) = 2x^3 - 7x^2$
12. Pour chaque fonction, détermine $\frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ sous forme simplifiée.
- $f(x) = 6x$
 - $f(x) = 2x^3$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = -\frac{4}{x}$

Le domaine d'une fonction

13. Indique le domaine de chaque fonction.
- $f(x) = 3 - 5x$
 - $y = \frac{8 + x}{8 - x}$
 - $Q(x) = x^4 - x^2 + 4x$
 - $y = \sqrt{x}$
 - $y = \frac{x^2}{x^2 + x - 6}$
 - $D(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9 - x}$

La représentation d'intervalles

14. On peut représenter un intervalle de plusieurs façons. Copie le tableau ci-dessous et ajoute les données manquantes.

Notation des intervalles	Inéquation	Droite numérique
$] -3, 5[$		
	$-3 \leq x \leq 5$	
	$-3 \leq x < 5$	
$] -3, 5]$		
		
$] -3, \infty[$		
	$x < 5$	
	$x \leq 5$	
$] -\infty, \infty[$	$-\infty < x < \infty$	

La représentation graphique de fonctions à l'aide de la technologie

15. Représente graphiquement chaque fonction à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Indique le domaine et l'image de chaque fonction à l'aide de la notation des ensembles.
- $y = -5x^3$
 - $y = \sqrt{x}$
 - $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
 - $y = 0,5x^2 + 1$

PROBLÈME du chapitre

Alicia aimerait devenir démographe ou climatologue. Les démographes étudient les changements dans les populations humaines en ce qui a trait aux naissances, aux décès, à la migration, au niveau de scolarité, à l'emploi et au revenu. Les climatologues étudient les effets à court et à long terme de la variation des conditions climatiques. Comment utilise-t-on les taux de variation moyen et instantané pour analyser des données, résoudre des problèmes et faire des prédictions dans ces deux professions?



1.1

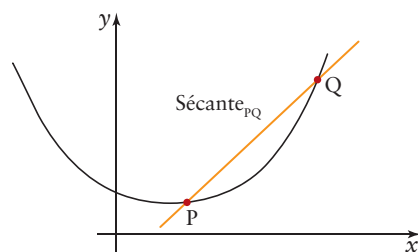
Les taux de variation et la pente d'une courbe

On exprime habituellement la vitesse d'une voiture en *kilomètres à l'heure*. Cette expression indique le changement de position, en kilomètres, en fonction du temps, en heures. Elle peut représenter un **taux de variation moyen** ou un **taux de variation instantané**. Ainsi, si une voiture parcourt 80 km en 1 h, le taux de variation moyen est de 80 km/h. Toutefois, cette expression ne dit rien sur le mouvement de la voiture à différents moments durant cette heure. Le taux de déplacement à un moment précis s'appelle le taux de variation instantané. C'est l'information donnée par l'indicateur de vitesse.

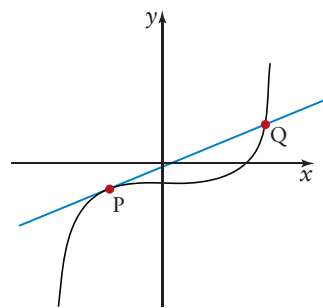
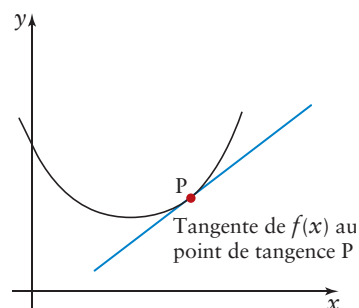


Dans cette section, tu utiliseras la pente d'une droite pour calculer un taux de variation moyen. Cette habileté te servira aussi à estimer un taux de variation instantané. Tu utiliseras la pente de deux types de droites : les sécantes et les tangentes.

- Une **sécante** est une droite qui relie deux points d'une même courbe.



- Dans le cas d'une courbe simple, une **tangente** est une droite qui est parallèle à la courbe, ou qui a la même orientation. Elle coupe la courbe en *un seul* point. Ce point se nomme **point de tangence**. La droite est dite tangente à la courbe en ce point. Dans le cas de fonctions complexes, une droite tangente à la courbe en une valeur x peut être sécante à la courbe sur un intervalle de la fonction.



Explore

Quel lien existe-t-il entre la pente, le taux de variation moyen et le taux de variation instantané ?

Imagine que tu souhaites acheter un véhicule. La voiture neuve qui t'intéresse se vend 22 000 \$. Toutefois, comme la plupart des véhicules, cette voiture perdra de la valeur, ou se dépréciera, au fil des ans. Le tableau ci-dessous indique la valeur de la voiture sur une période de 10 ans.

Temps (en années)	Valeur (\$)	Temps (en années)	Valeur (\$)
0	22 000	6	6 950
1	16 200	7	6 270
2	14 350	8	5 060
3	11 760	9	4 380
4	8 980	10	4 050
5	7 820		

Matériel

- papier quadrillé
- règle

A : Le taux de variation moyen et la pente d'une sécante

1. Explique pourquoi la valeur de la voiture est la **variable dépendante** et le temps, la **variable indépendante**.
2. Représente graphiquement les données du tableau sur du papier quadrillé, avec un maximum de précision. Trace une courbe lisse qui relie les points. Que t'apprend ce graphique sur le taux de dépréciation de la voiture en fonction du temps ?
3. a) Trace une sécante qui relie les deux points correspondants à chaque intervalle ci-dessous. Puis, détermine la pente de chaque sécante.
 - i) de l'an 0 à l'an 10
 - ii) de l'an 0 à l'an 2
 - iii) de l'an 3 à l'an 5
 - iv) de l'an 8 à l'an 10b) **Réflexion** Pourquoi la pente d'une sécante est-elle un exemple de taux de variation moyen ? Compare les pentes sur ces intervalles. Que t'apprend cette comparaison sur le taux de variation moyen de la valeur de la voiture en fonction du temps ?
4. **Réflexion** Détermine les premières différences des données du tableau. Que remarques-tu au sujet des premières différences et du taux de variation moyen ?

B : Le taux de variation instantané et la pente d'une tangente

1. Place une règle le long du graphique de la fonction pour créer une tangente approximative au point correspondant à l'année 0. Déplace la règle le long du graphique en t'assurant qu'elle demeure tangente à la courbe.
 - a) **Réflexion** Choisis quelques points au hasard pendant ce déplacement. À ton avis, que représente la tangente en chacun de ces points ?
 - b) **Réflexion** Explique comment tu peux décrire la forme d'une courbe à l'aide de pentes.

2. a) À l'aide d'une règle, trace une tangente approximative qui passe par le point correspondant à l'an 1 dans le graphique. Puis, trouve la pente de cette tangente à l'aide du graphique.
- b) **Réflexion** Pourquoi le calcul de la pente de la tangente est-il approximatif? Comment pourrais-tu obtenir une valeur plus précise?

C: Le taux de variation moyen et le taux de variation instantané

1. a) Trace une sécante qui correspond à chacun des intervalles ci-dessous. Puis, détermine la pente de chaque sécante.
 - i) de l'an 1 à l'an 9 ii) de l'an 1 à l'an 5 iii) de l'an 1 à l'an 3
- b) Compare les pentes des sécantes avec la pente de la tangente tracée plus tôt. Que remarques-tu? Formule une hypothèse sur la pente de la sécante de l'an 1 à l'an 2 par rapport à la pente de la tangente à l'an 1.
- c) Utilise les données du tableau pour calculer la pente de la sécante dans l'intervalle de l'an 1 à l'an 2. Ton calcul confirme-t-il ton hypothèse?
2. **Réflexion** À l'aide des résultats de cet exercice, résume la relation qui existe entre la pente, les sécantes, les tangentes, le taux de variation moyen et le taux de variation instantané.

Exemple

Déterminer les taux de variation moyen et instantané à partir d'une table de valeurs

On remplit un ballon d'anniversaire d'hélium. Le tableau ci-contre indique le volume d'hélium contenu dans le ballon à des intervalles de 3 s pendant 30 s.

$t(s)$	$V(\text{cm}^3)$
0	0
3	4,2
6	33,5
9	113,0
12	267,9
15	523,3
18	904,3
21	1 436,0
24	2 143,6
27	3 052,1
30	4 186,7

- a) Nomme la variable dépendante et la variable indépendante. En quelles unités dois-tu exprimer le taux de variation?
- b) À l'aide de la table de valeurs, calcule la pente de la sécante pour chacun des intervalles ci-dessous. Que représente la pente de la sécante?
 - i) 21 s à 30 s ii) 21 s à 27 s iii) 21 s à 24 s
- c) **Réflexion** Le volume d'hélium dans le ballon est représenté par un taux de variation positif. Explique ce que cela veut dire.
- d) Représente graphiquement les données du tableau. Trace une tangente approximative au point correspondant à 21 s dans le graphique, puis calcule sa pente. Qu'est-ce que ce graphique montre? Que représente la pente de la tangente?
- e) Compare les pentes des sécantes en b) avec la pente de la tangente. Que remarques-tu? Quelles données te faudrait-il pour obtenir une pente encore plus près de celle de la tangente?

Solution

- a) Dans ce problème, le volume dépend du temps. Donc, V est la variable dépendante et t est la variable indépendante. En ce qui concerne le taux de variation, V s'exprime par rapport à t , ou $\frac{V}{t}$. Puisque le volume est exprimé en centimètres cubes et que le temps est exprimé en secondes, le taux de variation est exprimé en centimètres cubes à la seconde (cm^3/s).

- b) Calcule la pente de la sécante à l'aide de la formule

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

- i) Les extrémités de l'intervalle $21 \leq t \leq 30$ sont $(21, 1\,436,0)$ et $(30, 4\,186,7)$.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{4\,186,7 - 1\,436,0}{30 - 21} \approx 306$$

- ii) Les extrémités de l'intervalle $21 \leq t \leq 27$ sont $(21, 1\,436,0)$ et $(27, 3\,052,1)$.

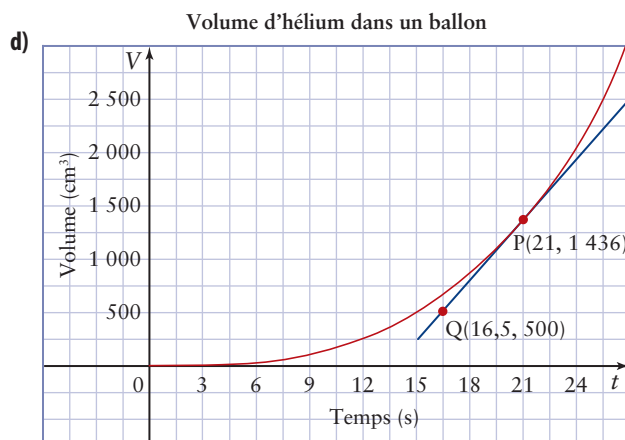
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{3\,052,1 - 1\,436,0}{27 - 21} \approx 269$$

- iii) Les extrémités de l'intervalle $21 \leq t \leq 24$ sont $(21, 1\,436,0)$ et $(24, 2\,143,6)$.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2\,143,6 - 1\,436,0}{24 - 21} \approx 236$$

La pente de la sécante représente le taux de variation moyen. Dans ce problème, il s'agit du taux de variation moyen du volume d'hélium dans le ballon durant l'intervalle. On exprime les réponses en centimètres cubes à la seconde (cm^3/s).

- c) Le taux de variation positif dans ces intervalles suggère que le volume d'hélium augmente et que le ballon prend de l'expansion.



MATHS ET MONDE

Le symbole $\approx$ indique une réponse approximative.

Ce graphique montre l'augmentation du volume du ballon en fonction du temps. La pente de la tangente représente le taux de variation instantané du volume au point de tangence.

Pour déterminer le taux de variation instantané du volume à 21 s, trace une tangente approximative qui passe par le point $P(21, 1\,436)$. Choisis un second point de la tangente, $Q(16,5, 500)$, puis calcule la pente.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1\,436 - 500}{21 - 16,5} = 208$$

À 21 s, le volume d'hélium dans le ballon augmente à un taux approximatif de $208 \text{ cm}^3/\text{s}$.

- e) Les pentes des sécantes en b) sont 305,6, 296,4 et 235,9. Plus l'intervalle diminue, plus la pente de la sécante se rapproche de celle de la tangente. Pour obtenir une pente approximative plus près de celle de la tangente, il faut connaître les données de plus petits intervalles.

CONCEPTS CLÉS

- Le taux de variation moyen est un taux de variation d'une fonction sur un intervalle. Il correspond à la pente de la sécante qui relie les deux extrémités de l'intervalle.
- Le taux de variation instantané est un taux de variation en un point précis. Il correspond à la pente de la tangente qui passe par un seul point du graphique d'une fonction, à savoir le point de tangence.
- Pour estimer le taux de variation instantané, on calcule le taux de variation moyen sur le plus petit intervalle pour lequel on a des données. On peut aussi estimer le taux de variation instantané à l'aide de la pente d'une tangente au graphique. Toutefois, l'efficacité de ces deux méthodes est limitée par le degré de précision des données ou de l'esquisse.

Communication et compréhension

- C1** Quelle différence y a-t-il entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané?
- C2** Comment peux-tu choisir des points d'une courbe pour que la sécante donne une meilleure estimation du taux de variation instantané en un point de l'intervalle?
- C3** Es-tu en accord que pour déterminer le taux de variation instantané en un point avec plus de précision, il est préférable de tracer la tangente à la courbe plutôt que d'utiliser les données de la table de valeurs? Explique ta réponse.

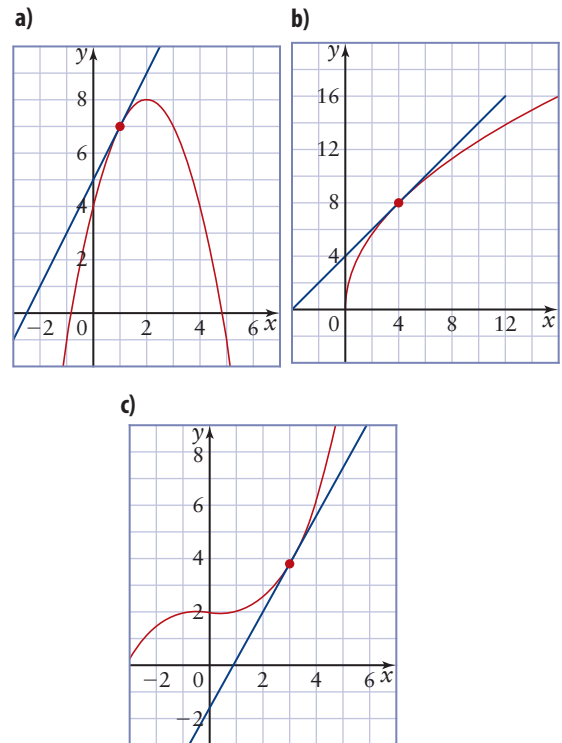
A À ton tour

- Détermine le taux de variation moyen entre les points de chaque paire.
 - $(-4, -1)$ et $(2, 6)$
 - $(3, 2, -6, 7)$ et $(-5, 17)$
 - $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right)$ et $\left(-1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
- Réponds à la question ci-dessous à l'aide de cet ensemble de données.

x	-3	-1	1	3	5	7
y	5	-5	-3	5	6	45

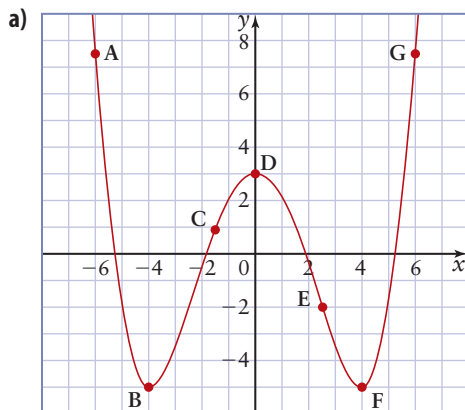
- Détermine le taux de variation moyen de y sur chaque intervalle.
 - $-3 \leq x \leq 1$
 - $-3 \leq x \leq 3$
 - $1 \leq x \leq 7$
 - $-1 \leq x \leq 5$

- Estime le taux de variation instantané au point de tangence indiqué sur chaque graphique.

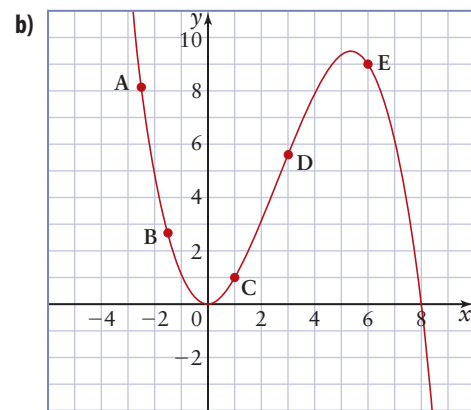


B Liens et mise en application

- Pour chaque graphique, décris le taux de variation instantané aux points indiqués, puis compare ces taux. Explique ton raisonnement.



- B, D et F
- A et G
- C et G
- A et E



- B et C
- A, B et E
- C et D
- A et C

5. L'aire totale d'un ballon augmente à mesure qu'on envoie de l'air à l'intérieur. Le tableau ci-dessous indique l'aire totale du ballon à des intervalles de 2 s pendant 30 s.



Temps (s)	Aire totale (cm ²)	Temps (s)	Aire totale (cm ²)
0	10,0	16	813,8
2	22,56	18	1 027,4
4	60,24	20	1 266,0
6	123,04	22	1 529,8
8	210,96	24	1 818,6
10	324,0	26	2 132,6
12	462,16	28	2 471,8
14	625,4	30	2 836,0

- a) Nomme la variable dépendante et la variable indépendante. En quelles unités devras-tu exprimer les taux ?
- b) Détermine le taux de variation moyen de l'aire totale du ballon pour chaque intervalle.
- les premières 10 s
 - entre 20 s et 30 s
 - les dernières 6 s
- c) Estime le taux de variation instantané pour chaque temps à l'aide de la table de valeurs.
- 2 s
 - 14 s
 - 28 s
- d) Représente graphiquement les données de la table de valeurs. Utilise le graphique pour estimer le taux de variation instantané à chaque temps.
- 6 s
 - 16 s
 - 26 s
- e) Que t'apprend le graphique au sujet du taux de variation instantané de l'aire totale du ballon ? Comment les valeurs trouvées en d) confirment-elles cette observation ? Explique ta réponse.
6. Quel intervalle donne la meilleure estimation de la tangente en $x = 3$ sur une courbe lisse ?
- A $2 < x < 4$ B $2 < x < 3$
- C $3 < x < 3,3$ D Nous ne pouvons pas en être certains.

7. a) Pour chaque ensemble de données, calcule les premières différences et le taux de variation moyen de y entre chaque paire de points consécutifs.

i)

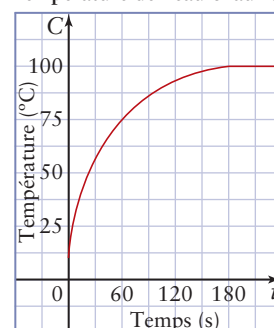
x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-50	-12	2	4	6	20

ii)

x	-6	-4	-2	0	2	4
y	-26	26	22	10	38	154

- b) Compare les valeurs trouvées en a) pour chaque ensemble de données. Que remarques-tu ?
- c) Explique ce que tu as remarqué en b).
- d) Que peux-tu conclure au sujet des premières différences et du taux de variation moyen d'intervalles consécutifs ?
8. Détermine si chaque situation représente un taux de variation moyen ou un taux de variation instantané. Explique tes choix.
- Quand le rayon d'une ondulation circulaire à la surface d'un étang est de 4 cm, la circonférence de l'ondulation augmente au rythme de 21,5 cm/s.
 - Niko parcourt 550 km en 5 h.
 - À 13 h, un train roule à 120 km/h.
 - Le cours d'un titre chute de 20 % en une semaine.
 - Le niveau d'eau d'un lac augmente de 1,5 m du début mars à la fin mai.

9. Ce graphique montre la température de l'eau chauffée dans une bouilloire électrique.



- a) Quelle était la température initiale de l'eau ? Qu'est-il arrivé après 3 min ?
- b) Que t'apprend le graphique sur le taux de variation de la température de l'eau ? Explique ta réponse à l'aide de calculs.

10. **Problème du chapitre** Alicia a trouvé des données sur la population du Canada de 1975 à 2005.

Année	Population du Canada
1975	23 143 192
1976	23 449 791
1977	23 725 921
1978	23 963 370
1979	24 201 801
1980	24 516 071
1981	24 820 393
1982	25 117 442
1983	25 366 969
1984	25 607 651
1985	25 842 736
1986	26 101 155
1987	26 448 855
1988	26 795 383
1989	27 281 795
1990	27 697 530
1991	28 031 394
1992	28 366 737
1993	28 681 676
1994	28 999 006
1995	29 302 091
1996	29 610 757
1997	29 907 172
1998	30 157 082
1999	30 403 878
2000	30 689 035
2001	31 021 251
2002	31 372 587
2003	31 676 077
2004	31 989 454
2005	32 299 496

Source: Statistique Canada, *La population estimée du Canada, de 1971 à aujourd'hui* (tableau), n° de produit 98-187-XIF au catalogue de Statistique Canada.

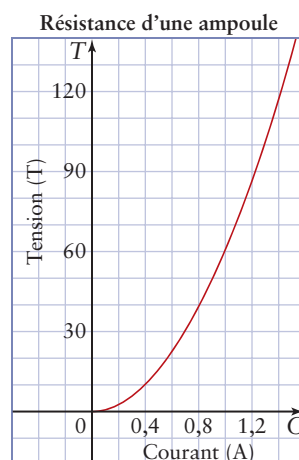
- a) Détermine le taux de variation moyen de la population du Canada pour chaque intervalle.
- i) de 1975 à 2005 ii) de 1980 à 1990
 - iii) chaque période de 10 ans à partir de 1975
- b) Compare les valeurs obtenues en a). Que remarques-tu? Explique ta réponse. Estime le taux de variation instantané de la croissance démographique en 1983, 1993 et 2003.

- c) **Technologie** Représente graphiquement les données du tableau à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Que t'apprend le graphique sur le taux de variation instantané de la population?
- d) Fais quelques prédictions sur la population du Canada à partir de tes observations en a), b) et c).
- e) Formule une question en lien avec le taux de variation moyen de la population et réponds-y. Formule une question sur le taux de variation instantané et réponds-y.

✓ Question d'évaluation

11. a) Décrit un graphique dans lequel le taux de variation moyen est égal au taux de variation instantané pour tout le domaine de la fonction. Décrit une situation de la vie courante qu'il peut représenter.
- b) Décrit un graphique dans lequel le taux de variation moyen entre deux points est égal au taux de variation instantané:
- i) en un des deux points,
 - ii) à mi-chemin des deux points.
- c) Décrit une situation de la vie courante que chaque graphique en b) pourrait représenter.
12. Le graphique montre la tension appliquée à une ampoule, en volts, et l'intensité, en ampères, du courant électrique qui la traverse. Le taux de variation instantané de la tension par rapport à l'intensité du courant est la résistance.

- a) Est-ce que la résistance augmente ou diminue quand la tension augmente? Explique ta réponse.
- b) À l'aide du graphique, détermine la résistance de l'ampoule à une tension de 60 V.



13.



Une plate-forme de forage en mer a une fuite. Le pétrole se répand à la surface de l'océan sous la forme d'un cercle dont le rayon augmente de 1 m toutes les 30 s.

- Construis une table de valeurs qui indique l'aire de la nappe de pétrole à des intervalles de 2 min pendant 30 min. Puis, représente graphiquement ces données.
 - Détermine le taux de variation moyen de l'aire pour chaque intervalle.
 - les 4 premières minutes
 - les 10 minutes suivantes
 - les 30 minutes entières
 - Quelle différence y a-t-il entre le taux de variation instantané de l'aire de la nappe de pétrole à 5 min et à 25 min ?
 - En quoi ce renseignement peut-il s'avérer utile ?
14. Les pales d'une éolienne décrivent un mouvement circulaire de 10 m de diamètre. Avec les conditions de vent actuelles, les pales font une rotation aux 20 s. Une coccinelle atterrit sur l'extrémité d'une pale alors que celle-ci est à son plus bas. La coccinelle est alors à 2 m du sol. Elle fait exactement deux tours complets, puis s'envole.
- Trace un graphique qui représente la hauteur de la coccinelle durant sa courte visite sur la pale de l'éolienne.
 - Si les pales de l'éolienne tournent à une vitesse constante, le taux de variation de la hauteur de la coccinelle est-il constant ? Explique ta réponse.

- Le taux de variation de la hauteur de la coccinelle dépend-il de la position de la pale quand la coccinelle y atterrit ?

15. a) Comment le graphique de la question 14 sur la hauteur de la coccinelle changera-t-il si la vitesse du vent augmente ? Comment changera-t-il si la vitesse du vent diminue ? Dans chaque cas, quel sera l'effet sur le taux de variation de la hauteur de la coccinelle ? Explique ta réponse.
- b) Comment le graphique de cette fonction changera-t-il si la coccinelle atterrit à 1 m de l'extrémité de la pale ? Quel sera l'effet sur le taux de variation de la hauteur ? Explique ta réponse.
16. Ce tableau indique la hauteur, H , de l'eau versée dans une tasse conique en fonction du temps, t .

- Compare ces taux quant à la hauteur de l'eau dans la tasse.

- Le taux de variation moyen les 3 premières secondes et les 3 dernières secondes.
- Le taux de variation instantané à 3 s et à 9 s.

- Explique tes résultats en a).

- Représente graphiquement les données initiales, puis les résultats obtenus en a). À quoi ressembleraient ces graphiques si la tasse était cylindrique ?

- La hauteur de la tasse est égale à son diamètre le plus large. Détermine le volume pour chaque hauteur indiquée dans le tableau. Que t'apprend le volume sur le taux auquel l'eau est versée ?

t (s)	H (cm)
0	0
1	2,48
2	3,13
3	3,58
4	3,94
5	4,24
6	4,51
7	4,75
8	4,96
9	5,16
10	5,35

17. **Concours de maths** Si x et y sont des nombres réels et que $x + y = 8$ et $xy = 12$, quelle est la valeur de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?
18. **Concours de maths** Sachant que $5 = 3\sqrt{g}$, détermine la valeur de $\log_9 g$.

Déterminer le taux de variation à l'aide d'une équation

La fonction $h(t) = -4,9t^2 + 24t + 2$ représente la position d'une fusée lancée d'une hauteur de 2 m au-dessus du sol lors d'un feu d'artifice de la fête du Canada. Ce type de fusée explose 10 s après son lancement. Les ingénieures et les ingénieurs en pyrotechnie doivent établir la vitesse de la fusée et sa position au moment de l'explosion afin de synchroniser l'explosion avec la musique et de coordonner le spectacle.

Dans la section 1.1, tu as appris à déterminer le taux de variation moyen à partir d'une table de valeurs et d'un graphique. Tu as aussi appris à utiliser ces stratégies pour estimer le taux de variation instantané. Toutefois, le degré de précision d'une telle estimation varie selon le degré de précision des données ou de l'esquisse de la tangente. Dans cette section, tu apprendras à calculer un taux de variation instantané de plus en plus précis à l'aide d'une équation.



Explore

Comment peut-on déterminer le taux de variation instantané à l'aide d'une équation ?

Un spa extérieur contient 2 700 l d'eau. Il faut 3 heures pour le vider par une valve au fond du spa. Le volume d'eau dans le spa est représenté par la fonction $V(t) = \frac{1}{12}(180 - t)^2$, où V est le volume d'eau dans le spa, en litres, et t le temps écoulé, en minutes, depuis l'ouverture de la valve. Détermine le taux de variation instantané du volume d'eau à 60 min.

A : Déterminer le taux de variation instantané pour une valeur particulière du domaine

Méthode 1 : Travailler avec des nombres

1. a) Quelle est la forme du graphique de cette fonction ?
- b) Exprime le domaine de cette fonction sous la forme d'un intervalle. Explique ta réponse.
- c) Calcule $V(60)$. En quelles unités exprimes-tu le résultat ? Explique pourquoi calculer le volume pour $t = 60$ ne t'apprend rien sur le taux de variation. Que manque-t-il ?

2. Copie le tableau ci-dessous et remplis-le. Les premières données sont déjà inscrites.

Point de tangence, P	Échelon de temps (min)	Second point, Q	Pente de la sécante PQ
(60, 1 200)	3	(63, 1 140,8)	$\frac{1\,140,8 - 1\,200}{63 - 60} \approx -19,7$
(60, 1 200)	1	(61, 1 180,1)	
(60, 1 200)	0,1	(60,1, 1 198)	
(60, 1 200)	0,01		
(60, 1 200)	0,001		
(60, 1 200)	0,000 1		

3. a) Pourquoi la pente de PQ est-elle négative ?
b) Comment la pente de PQ varie-t-elle à mesure que les échelons de temps diminuent ? Explique pourquoi cela a du sens.
4. a) Prédis la pente de la tangente en P(60, 1 200).
b) **Réflexion** Comment pourrais-tu trouver une estimation plus précise de la pente de la tangente en P(60, 1 200) ?

Matériel

- calculatrice à affichage graphique

MATHS ET MONDE

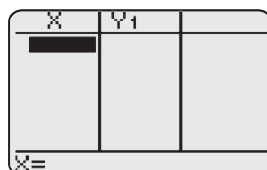
Le logiciel *Cybergéomètre* peut également servir à déterminer le taux de variation instantané à partir d'une équation.

Méthode 2 : Utiliser une calculatrice à affichage graphique

- a) Tu veux connaître la pente de la tangente au point où $x = 60$.
Détermine d'abord les coordonnées du point de tangence : P(60, V(60)).
- b) Détermine un second point, Q(x, V(x)), qui correspond à n'importe quel moment, x.
- Écris une expression pour la pente de la sécante PQ.
- Pour quelle valeur de x l'expression de la question 2 n'est-elle pas valable ? Explique ta réponse.
- Simplifie l'expression, si possible.
- Appuie sur la touche $\boxed{Y=}$ d'une calculatrice à affichage graphique et entre l'expression de la pente (étape 2) dans Y1.
- a) Appuie sur les touches $\boxed{2ND}$ $\boxed{WINDOW}$ pour accéder au menu TABLE SETUP.
b) Fais défiler le curseur jusqu'à **Indpnt**. Sélectionne **Ask** et appuie sur $\boxed{ENTER}$.



- c) Appuie sur les touches $\boxed{2ND}$ $\boxed{GRAPH}$ pour accéder à TABLE.



7. a) Saisis des valeurs de x supérieures à 60, mais très proches de ce nombre, comme $x = 61$, $x = 60,1$, $x = 60,01$ et $x = 60,001$.
- b) Saisis des valeurs de x inférieures à 60, mais très proches de ce nombre, comme $x = 59$, $x = 59,9$, $x = 59,99$ et $x = 59,999$.
- c) Que représentent les valeurs de sortie pour Y1 ? Explique ta réponse.
- d) Comment peux-tu améliorer la précision de cette valeur ?
Donne un exemple.

B : Déterminer le taux de variation en un point quelconque

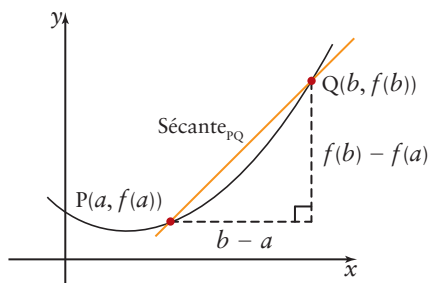
1. Choisis un temps à l'intérieur du domaine. Puis, copie le tableau ci-dessous et remplis-le. Soit $x = a$ le temps pour lequel tu aimerais calculer le taux de variation instantané du volume d'eau restant dans le spa. Soit h un échelon de temps qui sépare les points P et Q.

Point de tangence P $P(a, V(a))$	Échelon de temps (min)	Second point $Q((a + h), V(a + h))$	Pente de la sécante $\frac{V(a + h) - V(a)}{(a + h) - a}$
	3		
	1		
	0,1		
	0,01		
	0,001		
	0,000 1		

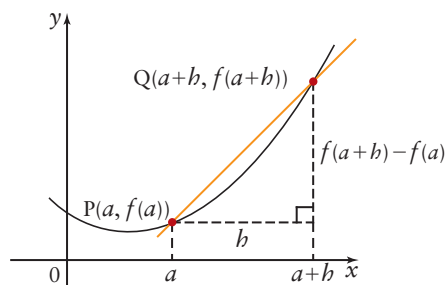
2. a) Prédis la pente de la tangente en $P(a, V(a))$.
b) Vérifie ta prédiction à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
3. **Réflexion** Compare la méthode qui consiste à estimer un taux de variation instantané à l'aide d'une équation avec les méthodes de la section 1.1. Écris un court texte pour résumer les ressemblances, les différences, les avantages et les inconvénients que tu as remarqués.
4. **Réflexion** À l'aide des résultats obtenus, explique comment la formule de la pente dans le tableau peut servir à estimer la pente de la tangente à une courbe en un point.

Soit la fonction $y = f(x)$. Si on connaît son équation, on peut déterminer le taux de variation moyen sur un intervalle $a \leq x \leq b$ en calculant la pente de la sécante :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Si h représente l'intervalle entre deux points sur l'axe des x , on peut définir ces deux points par rapport à a : a et $(a + h)$. Les deux extrémités de la sécante sont alors $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.

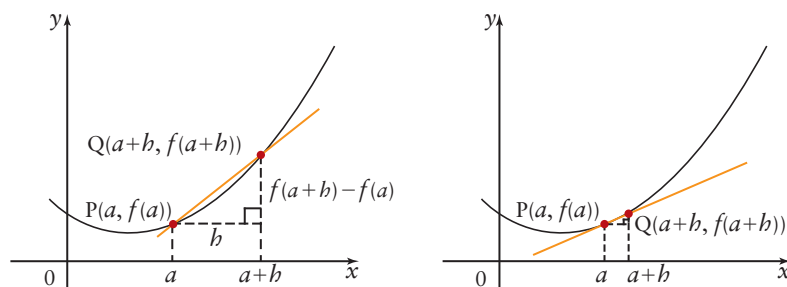


La pente de la sécante qui relie les points $P(a, f(a))$ et $Q(a + h, f(a + h))$ est

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} \\ &= \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \end{aligned}$$

où $h \neq 0$.

Le taux de variation instantané est un taux de variation en un moment unique (ou précis). Il est représenté par la pente de la tangente à la courbe en ce point. À mesure que la valeur de h diminue, la pente de la sécante s'approche de plus en plus de la pente de la tangente. Elle fournit ainsi une estimation de plus en plus précise à mesure que h s'approche de zéro.



Exemple**Estimer la pente d'une tangente en simplifiant d'abord une expression algébrique**

Ahmed lave la fenêtre sur le balcon de sa tante. Le balcon est situé à 90 m au-dessus du sol. Accidentellement, Ahmed fait tomber un pot de fleurs en bas du balcon.

- Définis une expression algébrique, par rapport à a et à h , qui représente le taux de variation moyen de la hauteur au-dessus du sol du pot de fleurs en chute libre. Simplifie ton expression.
- Détermine le taux de variation moyen de la hauteur du pot de fleurs dans l'intervalle de 1 à 3 s après le début de sa chute.
- Estime le taux de variation instantané de la hauteur du pot de fleurs à 1 s, puis à 3 s.
- Détermine l'équation de la tangente en $t = 1$. Esquisse un graphique de la courbe et de la tangente en $t = 1$.
- Vérifie tes résultats en d) à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.

Solution

On peut représenter la hauteur d'un objet en chute libre par la fonction $s(t) = d - 4,9t^2$, où d est la hauteur initiale de l'objet au-dessus du sol, en mètres, et t le temps, en secondes. La hauteur du pot de fleurs au-dessus du sol à tout instant après le début de sa chute correspond à $s(t) = 90 - 4,9t^2$.

- La pente de la sécante représente le taux de variation moyen sur un intervalle. Pour estimer la pente de la sécante, récris l'expression

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ en fonction de } s(t) = 90 - 4,9t^2.$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{[90 - 4,9(a+h)^2] - (90 - 4,9a^2)}{h} \\ &= \frac{90 - 4,9(a^2 + 2ah + h^2) - 90 + 4,9a^2}{h} \\ &= \frac{90 - 4,9a^2 - 9,8ah - 4,9h^2 - 90 + 4,9a^2}{h} \\ &= \frac{-9,8ah - 4,9h^2}{h} \\ &= -9,8a - 4,9h, \text{ où } h \neq 0 \end{aligned}$$

- b) Pour calculer le taux de variation moyen de la hauteur du pot de fleurs au-dessus du sol dans l'intervalle de 1 à 3 s, utilise $a = 1$ et $h = 2$ (à savoir, l'intervalle de 2 s après 1 s).

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= -9,8(1) - 4,9(2) \\ &= -19,6\end{aligned}$$

Entre 1 s et 3 s, le taux de variation moyen de la hauteur du pot de fleurs est de $-19,6$ m/s. Le résultat négatif indique que le pot de fleurs se déplace vers le bas.

- c) À mesure que l'intervalle diminue, la pente de la sécante s'approche de celle de la tangente en a . Cette valeur représente le taux de variation instantané en ce point.

a	h	Pente de la sécante $= -9,8a - 4,9h$
1	0,01	$-9,8(1) - 4,9(0,01) = -9,75$
1	0,001	$-9,8(1) - 4,9(0,001) = -9,795$
3	0,01	$-9,8(3) - 4,9(0,01) = -29,35$
3	0,001	$-9,8(3) - 4,9(0,01) = -29,395$

D'après ces données, il semble que la pente de la sécante s'approche de $-9,8$ m/s à 1 s et de $-29,4$ m/s à 3 s.

- d) Pour déterminer l'équation de la tangente en $t = 1$, trouve d'abord le point de tangence en reportant les valeurs connues dans l'équation initiale.

$$\begin{aligned}s(1) &= 90 - 4,9(1)^2 \\ &= 85,1\end{aligned}$$

Le point de tangence est $(1, 85,1)$.

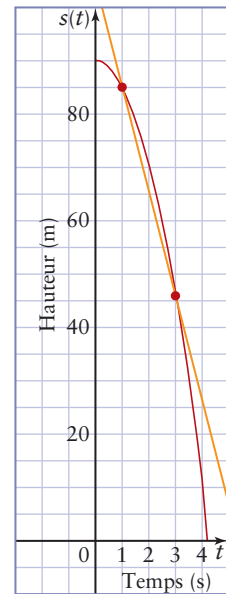
D'après la partie c), la pente estimée en ce point est $-9,8$. Reporte la pente et les coordonnées du point de tangence dans l'équation d'une droite : $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$$\begin{aligned}s - 85,1 &= -9,8(t - 1) \\ s &= -9,8t + 94,9\end{aligned}$$

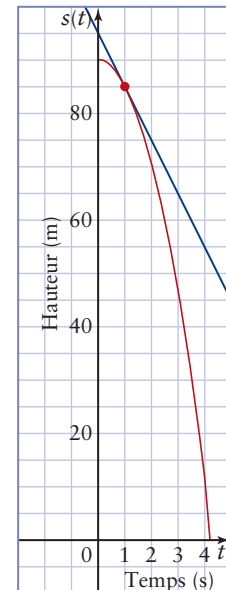
L'équation de la tangente à $(1, 85,1)$ est $s = -9,8t + 94,9$.

- e) Vérifie les résultats en d) à l'aide de la commande **Tangent** d'une calculatrice à affichage graphique. Modifie les paramètres de la fenêtre d'affichage comme suit avant de passer aux étapes suivantes.

Hauteur du pot de fleurs au-dessus du sol



Hauteur du pot de fleurs au-dessus du sol



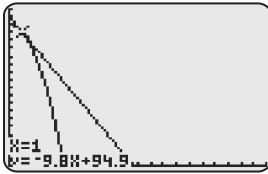
```

WINDOW
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=100
Yscl=5
Xres=1

```

- Entre l'équation $Y1 = 90 - 4,9x^2$. Appuie sur **GRAPH**.
- Appuie sur **2ND** **PRGM** pour afficher le menu **DRAW**.
- Choisis **5:Tangent(**.
- Entre l'abscisse du point de tangence, 1.

Le graphique et l'équation de la tangente confirment les résultats.



Paramètres d'affichage :

$x \in [0, 20]$, $y \in [0, 100]$, $Yscl = 5$

Conseil techno



Les valeurs par défaut des paramètres d'affichage sont $[-10, 10]$, pour l'axe des x et l'axe des y . On peut modifier ces valeurs. Pour accéder aux paramètres, appuie sur **WINDOW**. Si, pour générer un graphique de ce manuel, tu dois utiliser des valeurs différentes de celles qui sont établies par défaut, les valeurs à utiliser s'afficheront à côté de la saisie d'écran.

CONCEPTS CLÉS

- Pour une fonction $y = f(x)$, on estime le taux de variation instantané en $x = a$ en calculant la pente de la sécante pour un très petit intervalle, $a \leq x \leq a + h$, où h est un très petit nombre.
- L'expression $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, où $h \neq 0$, sert à calculer la pente de la sécante entre les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$. Plus la valeur de h est proche de 0, plus cette expression fournit une estimation précise de la pente de la tangente en a .
- On peut utiliser une calculatrice à affichage graphique pour tracer la tangente à une courbe lorsqu'on connaît l'équation de la fonction.

Communication et compréhension

- C1** Qu'est-il préférable d'utiliser pour estimer un taux de variation instantané : une équation ou une table de valeurs ? Explique ta réponse.
- C2** Pourquoi le fait de remplacer la valeur de h par une plus petite valeur dans l'expression $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, où $h \neq 0$, rapproche-t-il la pente de la sécante de la pente de la tangente ? Peut-on réduire la valeur de h infiniment ? Explique ta réponse.
- C3** Explique pourquoi h ne peut pas être égal à zéro dans l'expression $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, où $h \neq 0$.

A À ton tour

- Détermine le taux de variation moyen de $x = 1$ à $x = 4$ pour chaque fonction.
a) $y = x$ b) $y = x^2$ c) $y = x^3$ d) $y = 7$
- Estime le taux de variation instantané en $x = 2$ pour chaque fonction de la question 1.
- Écris une expression qui peut servir à estimer la pente de la tangente à la courbe de $y = f(x)$ en $x = 4$.
- Sans la simplifier, écris une expression qui peut servir à estimer le taux de variation instantané de $y = x^2$ en $x = -3$.
- Sans la simplifier, écris une expression qui peut servir à obtenir une expression algébrique permettant d'estimer la pente de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ en $x = 5$.
- Sans la simplifier, écris une expression qui peut servir à estimer la pente de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ en $x = -1$.
- Quels énoncés sont vrais pour l'expression $\frac{4(1+h)^3 - 4}{h}$? Explique tes réponses.
Corrige les énoncés qui sont faux.
a) L'équation de la fonction est $y = 4x^3$.
b) Au point de tangence, $x = 4$.
c) L'équation de la fonction est $y = 4x^3 - 4$.
d) L'expression est valable pour $h \neq 0$.

B Liens et mise en application

- Retourne à la question 4. Estime le taux de variation instantané en $x = -3$ comme suit:
a) Évalue l'expression pour $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = 0,001$.
b) Simplifie l'expression, puis évalue-la pour $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = 0,001$.
c) Compare tes réponses en a) avec celles en b). Que remarques-tu? Pourquoi cela a-t-il du sens?
- Retourne à ta réponse à la question 3. Suppose que $f(x) = x^4$. Simplifie d'abord l'expression, puis évalue-la pour $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = 0,001$.
- Estime le taux de variation moyen de $x = -3$ à $x = 2$ pour chaque fonction.
a) $y = x^2 + 3x$ b) $y = 2x - 1$
c) $y = 7x^2 - x^4$ d) $y = x - 2x^3$
- Détermine le taux de variation instantané en $x = 2$ pour chaque fonction de la question 10.
12. a) Développe et simplifie chaque expression. Puis, évalue-la pour $a = -3$ et $h = 0,01$.
i) $\frac{2(a+h)^2 - 2a^2}{h}$
ii) $\frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$
iii) $\frac{(a+h)^4 - a^4}{h}$
b) Que représente chaque réponse? Explique ta réponse.
13. Compare chaque expression ci-dessous avec $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, puis détermine:
i) l'équation de $y = f(x)$,
ii) la valeur de a ,
iii) la valeur de h ,
iv) le point de tangence $(a, f(a))$.
a) $\frac{(4,01)^2 - 16}{0,01}$ b) $\frac{(6,000\ 1)^3 - 216}{0,000\ 1}$
c) $\frac{3(-0,9)^4 - 3}{0,1}$ d) $\frac{-2(8,1) + 16}{0,1}$

14. Technologie

Quelqu'un botte un ballon de soccer. On peut représenter la hauteur s du ballon, en mètres, après un temps t , en secondes, par la fonction $s(t) = -4,9t^2 + 15t + 1$.



- Sans la simplifier, écris une expression qui représente le taux de variation moyen sur l'intervalle $1 \leq t \leq 1 + h$.
- Pour quelle valeur de h l'expression n'est-elle pas valable ? Explique ta réponse.
- Remplace h par chaque valeur ci-dessous et simplifie l'expression.

i) 0,1	ii) 0,01
iii) 0,001	iv) 0,000 1
- Utilise tes résultats en c) pour prédire le taux de variation instantané de la hauteur du ballon de soccer après 1 s. Explique ton raisonnement.
- Interprète le taux de variation instantané de cette situation.
- Trace la courbe et la tangente à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.

15. On vide un réservoir d'huile. Le volume, V , d'huile restant dans le réservoir, en litres, après un temps t , en minutes, est représenté par la fonction $V(t) = 60(25 - t)^2$, où $0 \leq t \leq 25$.

- Détermine le taux de variation moyen du volume durant les 10 premières minutes, puis durant les 10 dernières minutes. Compare ces valeurs et explique les ressemblances et les différences.
- Estime le taux de variation instantané du volume pour chaque temps.

i) $t = 5$	ii) $t = 10$
iii) $t = 15$	iv) $t = 20$

 Compare ces valeurs et explique les ressemblances et les différences.
- Trace un graphique qui représente le volume. Inclus une sécante de la partie a) et deux tangentes de la partie b).

16. Quand une boule de neige fond, son aire totale et son volume diminuent. L'aire totale, en centimètres carrés, et le volume, en centimètres cubes, sont représentés respectivement par les équations $A_t = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, où r est le rayon en centimètres.

- Détermine le taux de variation instantané de l'aire totale et du volume quand le rayon diminue de 25 cm à 20 cm.
- Estime le taux de variation moyen de l'aire totale et du volume quand le rayon est de 10 cm.
- Interprète tes réponses en a) et en b).

17.



Une branche morte tombe d'un arbre au sommet d'une falaise de 80 m de hauteur. La fonction $d(t) = 80 - 5t^2$, où $0 \leq t \leq 4$, donne la hauteur d , en mètres, de la branche au-dessus du sol après un temps t , en secondes.

- Détermine le taux de variation moyen de la hauteur sur l'intervalle $[0, 3]$. Que représente cette valeur ?
- À l'aide d'une expression algébrique simplifiée en fonction de a et de b , estime le taux de variation instantané de la hauteur à chacun des temps suivants. Évalue l'expression pour $h = 0,001$.

i) $t = 0,5$	ii) $t = 1$	iii) $t = 1,5$
iv) $t = 2$	v) $t = 2,5$	vi) $t = 3$
- Que représentent les valeurs obtenues en b) ? Explique ta réponse.

18. a) Remplis le tableau pour $f(x) = 3x - x^2$.
Détermine la pente de la tangente en $x = 4$.

Point de tangence (a, f(a))	Valeur de h	Second point, (a + h, f(a + h))	Pente de la sécante $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
	1		
	0,1		
	0,01		
	0,001		
	0,000 1		

- b) Qu'indiquent les valeurs de la dernière colonne au sujet de la pente de la tangente? Explique ta réponse.
19. Le prix d'une action d'une entreprise en technologie selon le temps écoulé t , en années, est donné par la fonction $P(t) = -t^2 + 16t + 3$, où $0 \leq t \leq 16$.
- a) Détermine le taux de variation moyen du prix des actions de l'an 4 à l'an 12.
- b) Estime le taux de variation instantané du prix pour chaque nombre d'années ci-dessous, à l'aide d'une expression algébrique simplifiée, en fonction de a et h , où $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = 0,001$.
- i) $t = 2$ ii) $t = 5$ iii) $t = 10$
iv) $t = 13$ v) $t = 15$
- c) Représente graphiquement la fonction.
20. **Technologie** Deux points, P(1, 1) et Q(x, $2x - x^2$) sont sur la courbe de $y = 2x - x^2$.
- a) Écris une expression simplifiée de la pente de la sécante PQ.
- b) Calcule la pente des sécantes quand $x = 1,1$, $1,01$, $1,001$, $0,9$, $0,99$ et $0,999$.
- c) Utilise tes calculs en b) pour estimer la pente de la tangente en P.
- d) Détermine l'équation de la tangente en P à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
- e) Trace la courbe et la tangente.
21. **Technologie** a) Soit la fonction définie par $y = \sqrt{x}$. Détermine le taux de variation instantané de y par rapport à x en $x = 6$.

Calcule la pente des sécantes de $x = 6$ à $x = 5,9$, $5,99$ et de $x = 6$ à $5,999$, $6,1$, $6,01$ et $6,001$.

- b) Trace la courbe et la tangente en $x = 6$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.

22. **Problème du chapitre** Alicia a effectué une recherche sur les phénomènes météorologiques. D'après ses découvertes, certaines régions de l'ouest du Canada et des États-Unis sont soumises au chinook, un vent qui peut causer une augmentation soudaine et importante de la température en hiver. Un record mondial a été enregistré à Spearfish, dans le Dakota du Sud. La température est passée de -20°C à 7 h 30, à 7°C à 7 h 32, puis à 12°C à 9 h. Toutefois, la température était redescendue à -20°C à 9 h 27.



- a) Représente cette situation à l'aide d'un graphique.
- b) Que t'apprend le graphique sur le taux de variation moyen de la température ce jour-là?
- c) Détermine le taux de variation moyen de la température pour toute cette période.
- d) Détermine l'équation qui représente le mieux les données.
- e) Utilise ton équation en d) pour écrire une expression, en fonction de a et de h , qui peut servir à estimer le taux de variation instantané de la température.
- f) Utilise ton expression en e) pour estimer le taux de variation instantané de la température à chaque heure.
- i) 7 h 32 ii) 8 h
iii) 8 h 45 iv) 9 h 15
- g) Compare les valeurs obtenues en c) avec celles obtenues en f). À ton avis, quelle valeur représente le mieux l'effet du chinook? Explique ta réponse.

23. On vide un spa contenant 2 250 l d'eau. La quantité d'eau qui reste dans le spa est représentée par la fonction $V(t) = 0,1(150 - t)^2$, où V est le volume d'eau, en litres, qui reste dans le spa en fonction du temps t , en minutes, et où $0 \leq t \leq 150$.

- a) Détermine le taux de variation moyen du volume d'eau durant les 60 premières minutes, puis durant les 30 dernières minutes.
b) Utilise deux méthodes pour estimer le taux de variation instantané après 75 minutes.
c) Trace un graphique de la fonction et la tangente en $t = 75$ min.

C Approfondissement et défis

24. **Technologie** Pour chacune des fonctions ci-dessous :

- I) Détermine le taux de variation moyen de y par rapport à x sur l'intervalle de $x = 9$ à $x = 16$.
II) Estime le taux de variation instantané de y par rapport à x en $x = 9$.
III) Trace le graphique de la fonction, la sécante et la tangente.

- a) $y = -\sqrt{x}$ b) $y = 4\sqrt{x}$
c) $y = \sqrt{x} + 7$ d) $y = \sqrt{x - 5}$

25. **Technologie** Pour chacune des fonctions ci-dessous,

- I) Détermine le taux de variation moyen de y par rapport à x sur l'intervalle de $x = 5$ à $x = 8$.
II) Estime le taux de variation instantané de y par rapport à x en $x = 7$.
III) Trace le graphique de la fonction, la sécante et la tangente.

- a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = -\frac{1}{x}$
c) $y = \frac{1}{x} - 4$ d) $y = \frac{5}{x + 1}$

26. **Technologie** Pour chacune des fonctions ci-dessous :

- I) Détermine le taux de variation moyen de y par rapport à θ sur l'intervalle de $\theta = \frac{\pi}{6}$ à $\theta = \frac{\pi}{3}$.
II) Estime le taux de variation instantané de y par rapport à θ en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

- III) Trace le graphique de la fonction, la sécante et la tangente.

- a) $y = \sin \theta$ b) $y = \cos \theta$ c) $y = \tan \theta$

27. a) Prédis le taux de variation moyen de la fonction $f(x) = c$, où c est tout nombre réel, sur tout intervalle $a \leq x \leq b$.

- b) Appuie ta prédiction à l'aide d'un exemple.

- c) Justifie ta prédiction à l'aide de $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

- d) Prédis le taux de variation instantané de $f(x) = c$ en $x = a$.

- e) Justifie ta prédiction.

28. a) Prédis le taux de variation moyen d'une fonction affine définie par $y = mx + b$ sur tout intervalle $a \leq x \leq b$.

- b) Appuie ta prédiction à l'aide d'un exemple.

- c) Justifie ta prédiction à l'aide de $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

- d) Prédis le taux de variation instantané de $y = mx + b$ en $x = a$.

- e) Justifie ta prédiction.

29. Détermine l'équation de la droite perpendiculaire à la tangente de $y = x^5$ en $x = -2$ qui passe par le point de tangence.

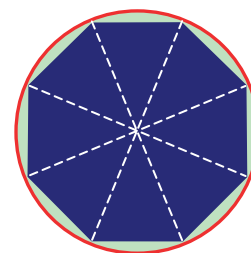
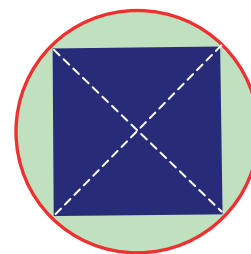
30. Concours de maths

Résous $4 - |x| = \sqrt{x^2 + 4}$ pour toutes les valeurs réelles de x .

31. **Concours de maths** Soit $a - b = \sqrt{135}$ et $\log_3 a + \log_3 b = 3$. Détermine la valeur de $\log_{\sqrt{3}}(a + b)$.

Les limites

Le mathématicien grec Archimède (287–212 av. notre ère) a prouvé la formule de l'aire d'un cercle, à savoir $A = \pi r^2$. Sa méthode, connue sous le nom de **méthode d'exhaustion**, consistait à calculer l'aire de polygones réguliers (qui ont des côtés congrus) *inscrits* dans le cercle. Un tel polygone est construit à l'intérieur du cercle et ses sommets touchent à la circonférence, comme sur les schémas ci-contre. L'aire du polygone permet d'estimer l'aire du cercle. Archimède a augmenté le nombre de côtés du polygone, jusqu'à ce qu'il obtienne une figure se rapprochant de celle du cercle. Comme tu peux le voir, un octogone donne une estimation beaucoup plus précise de l'aire d'un cercle qu'un carré. L'aire d'un hexadécagone (un polygone à 16 côtés) donnerait une estimation encore plus précise, et ainsi de suite. Qu'en est-il d'un myriagone, qui est un polygone à 10 000 côtés? Qu'arrive-t-il à l'estimation à mesure que le nombre de côtés s'approche de l'infini?



La méthode d'Archimède pour déterminer l'aire d'un cercle se base sur le concept de **limite**. Le cercle est la figure limite du polygone. À mesure que le nombre de côtés augmente, le polygone tend vers sa limite, à savoir la forme du cercle, sans pour autant devenir un cercle. Dans la section 1.2, tu as utilisé une stratégie semblable pour estimer le taux de variation instantané d'une fonction en un point. Ton estimation s'est précisée à mesure que l'intervalle entre deux points diminue. Les limites permettent de rendre l'intervalle infiniment petit, presque nul. Quand cela se produit, la pente de la sécante tend vers sa valeur limite, à savoir la pente de la tangente. Dans cette section, tu exploreras les limites et les méthodes qui permettent de les calculer.

Explore A

Comment peut-on déterminer la limite d'une suite?

Matériel

• calculatrice à affichage graphique

Facultatif

• Fathom

MATHS ET MONDE

Une suite infinie a parfois une valeur limite, L . À mesure que n augmente, les termes de la suite, t_n , s'approchent de L . Pour signifier que n augmente, on peut dire que n tend vers l'infini et utiliser la notation $n \rightarrow \infty$. Le symbole ∞ ne représente pas un nombre particulier, mais il peut être utile d'y voir un très grand nombre positif.

1. Examine les termes de la suite infinie $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}, \frac{1}{10\,000}, \dots$

Le terme général de cette suite est $t_n = \frac{1}{10^n}$. Qu'arrive-t-il à la valeur de chaque terme à mesure que n augmente et que le dénominateur augmente aussi?

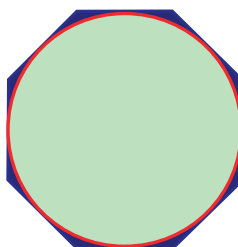
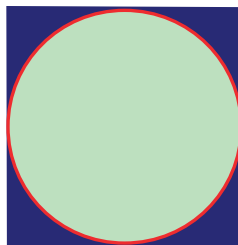
2. Quelle est la valeur de $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ (se lit: la limite de t_n quand n tend vers l'infini)? Pourquoi peux-tu dire que cette limite existe?

3. Situe dans un plan les couples $\left(n, \frac{1}{10^n}\right)$, qui correspondent à la suite. Explique comment le graphique confirme ta réponse à l'étape 2.

4. **Réflexion** Explique pourquoi $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ exprime une valeur approchée, mais non atteinte?

5. **Réflexion** Examine les termes de la suite infinie $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots, n^2, \dots$. Explique pourquoi $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ n'existe pas pour cette suite.

Archimède a réussi à estimer l'aire d'un cercle de l'intérieur, mais aussi de l'extérieur. Pour ce faire, il a calculé l'aire d'un polygone régulier *circonscrit* au cercle. Un tel polygone entoure le cercle et chacun de ses côtés touche à la circonférence du cercle. À mesure que le nombre de côtés du polygone augmente, sa forme et son aire s'approchent de celles d'un cercle.



La méthode d'Archimède peut également servir à déterminer la limite d'une fonction. On peut s'approcher d'une limite par la gauche ou par la droite. On parle alors de **limite à gauche** et de **limite à droite**. Pour évaluer une limite à gauche, on utilise des valeurs inférieures à la valeur approchée, c'est-à-dire à gauche de cette valeur. Pour évaluer une limite à droite, on utilise des valeurs supérieures à la valeur approchée, c'est-à-dire à droite de cette valeur. Dans les deux cas, ces valeurs sont très proches de la valeur approchée.

Explore B

Comment peut-on déterminer la limite d'une fonction à partir de son équation ?

1. a) Transcris ce tableau, puis remplis-le pour $y = x^2 - 2$.

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1	3,5	4
$y = x^2 - 2$											

- b) Examine les valeurs du tableau situées à gauche de 3, à partir de $x = 2$. Vers quelle valeur y tend-il lorsque x s'approche de 3 par la gauche ?
- c) À partir de $x = 4$, vers quelle valeur y tend-il lorsque x s'approche de 3 par la droite ?
- d) **Réflexion** Compare les valeurs obtenues pour y en b) et en c). Que remarques-tu ?
2. a) Représente la fonction définie par $y = x^2 - 2$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
- b) Appuie sur la touche **TRACE** et longe la courbe jusqu'à $x = 3$ par la gauche. Vers quelle valeur y tend-il lorsque x s'approche de 3 ?
- c) Utilise la touche **TRACE** pour longer la courbe jusqu'à $x = 3$ par la droite. Vers quelle valeur y tend-il lorsque x s'approche de 3 ?
- d) **Réflexion** Comment le graphique confirme-t-il tes résultats de l'étape 1 ?
3. **Réflexion** La valeur vers laquelle y tend lorsque x s'approche de 3 est « la limite de $y = x^2 - 2$ lorsque x s'approche de 3 ». On la note : $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2)$. Est-il sensé de dire que « la limite de $y = x^2 - 2$ existe en $x = 3$ » ?

Matériel

- calculatrice à affichage graphique

Facultatif

- Fathom
- Cybergéomètre

MATHS ET MONDE

En mathématiques, *tendre vers* signifie « s'approcher d'une valeur sans jamais l'atteindre ».

Tu as appris plus tôt que la limite existe si la suite tend vers une valeur unique. En fait, une fonction admet une limite en un point si elle a une limite à gauche et une limite à droite et que toutes deux s'approchent de la *même* valeur.

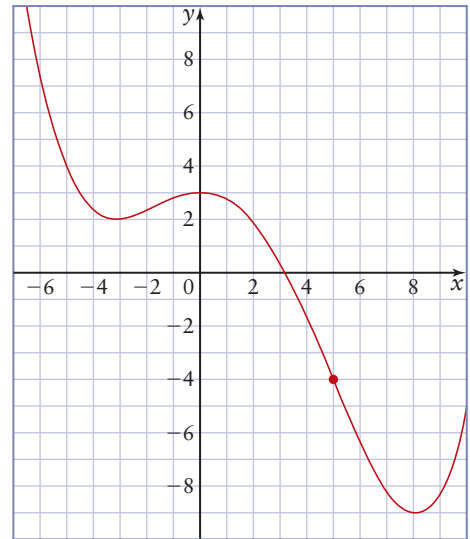
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe.
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Explore C

Comment peut-on déterminer la limite d'une fonction à partir d'un graphique donné ?

1. a) Place ton doigt sur le graphique au point où $x = -6$. Puis, trace le graphique en t'approchant de $x = 5$ par la gauche et indique la valeur approchée de y . Il s'agit de la limite à gauche.
- b) Place ton doigt sur le graphique au point où $x = 9$. Puis, trace le graphique en t'approchant de $x = 5$ par la droite et indique la valeur approchée de y . Il s'agit de la limite à droite.
- c) **Réflexion** Que représente la valeur $f(5)$ pour cette courbe ?



2. **Réflexion** Trace toute la courbe avec ton doigt. Pourquoi est-il sensé de dire qu'une telle courbe est continue ? Explique pourquoi toutes les fonctions polynômes seraient continues.
3. **Réflexion** Explique la définition du terme *continu* donnée ci-dessous.

Une fonction $f(x)$ est **continue en** $x = a$ si trois conditions sont satisfaites :

1. $f(a)$ est définie [$a \in \text{domaine de } f(x)$].
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Une **fonction continue** est continue en un point x , pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$. En termes simples, une fonction est continue si tu peux tracer son graphique sans lever ton crayon. Si la courbe est coupée, on parle de **discontinuité**. La fonction est **discontinue** au point où il y a coupure. Tu ne peux pas tracer son graphique sans lever ton crayon. Tu exploreras les fonctions discontinues dans la section 1.4.

Exemple 1

Analyser le comportement à l'infini d'une suite à l'aide des limites

Pour chacune des suites ci-dessous :

- i) Indique la limite, si elle existe. S'il n'y a pas de limite, explique pourquoi. Appuie ta réponse à l'aide d'un graphique.
- ii) Écris une expression limite qui représente le comportement à l'infini de la suite.

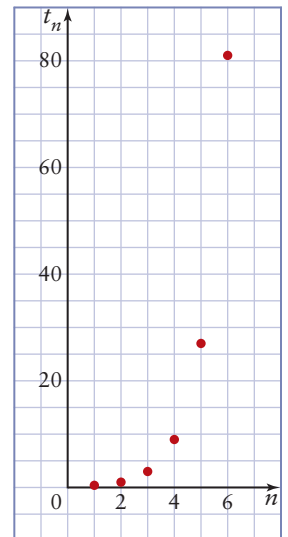
a) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots, 3^{n-2}, \dots$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

Solution

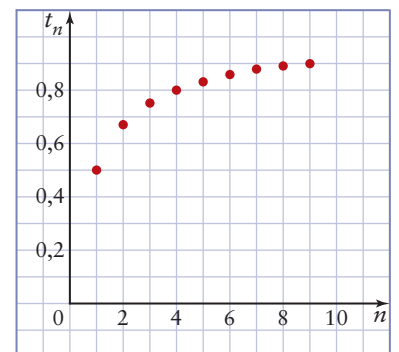
- a) i) Examine les termes de la suite $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots, 3^{n-2}, \dots$. Puisque les termes augmentent et ne convergent pas vers une valeur, la suite n'a pas de limite. Ce fait est confirmé par le graphique créé à l'aide des points

$$(n, t_n) : \left(1, \frac{1}{3}\right), (2, 1), (3, 3), (4, 9), (5, 27), (6, 81), \dots$$



- ii) Le comportement à l'infini de la suite est représenté par l'expression $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{n-2} = \infty$. Le symbole de l'infini indique que les termes de la suite sont des valeurs positives de plus en plus grandes, ou qu'ils augmentent sans limite. Il n'y a donc pas de limite.

- b) i) Examine les termes de la suite $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$. Convertir chaque terme en nombre décimal, arrondi au centième près le cas échéant, donne 0,5, 0,67, 0,75, 0,8, 0,83, ... Les trois prochains termes de la suite sont $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$ et $\frac{8}{9}$, ou 0,86, 0,875 et 0,89. Les termes augmentent, mais non sans limite. Ils semblent s'approcher de 1 à mesure que n augmente.



Pour vérifier, détermine $t_n = \frac{n}{n+1}$ pour de grandes valeurs de n .

$$t_{100} = \frac{100}{101} = 0,99 \text{ et } t_{1\,000} = \frac{1\,000}{1\,001} = 0,999.$$

La valeur de cette fonction ne sera jamais supérieure à 1, car la valeur du numérateur de cette fonction est toujours un de moins que la valeur du dénominateur.

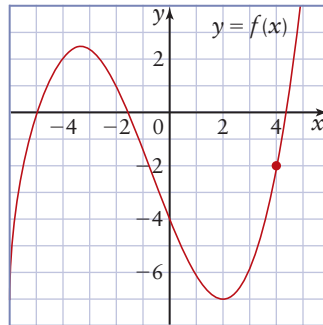
- ii) Le comportement à l'infini des termes de la suite est représenté par l'expression $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Exemple 2

Analyser un graphique pour évaluer la limite d'une fonction

À partir du graphique ci-dessous, détermine :

- a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
- d) $f(4)$



Solution

- a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ représente la limite lorsque x s'approche de 4 par la gauche. Suis le graphique à partir de la gauche. Tu verras que y s'approche de -2 en $x = 4$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ représente la limite lorsque x s'approche de 4 par la droite. Suis le graphique à partir de la droite. Tu verras que y s'approche de -2 en $x = 4$.
- c) La limite à gauche et la limite à droite sont toutes deux égales à -2 .
Donc, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2$.
- d) $f(4) = -2$

CONCEPTS CLÉS

- Une suite est une fonction, $f(n) = t_n$, dont le domaine est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si trois conditions sont satisfaites :
 1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe.
 2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe.
 3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Se lit « la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a , est égale à L ».
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.
- Une fonction $f(x)$ est continue en un point où $x = a$ si les trois conditions ci-dessous sont satisfaites :
 1. $f(a)$ est définie [$a \in \text{domaine de } f(x)$].
 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Communication et compréhension

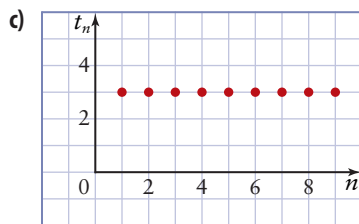
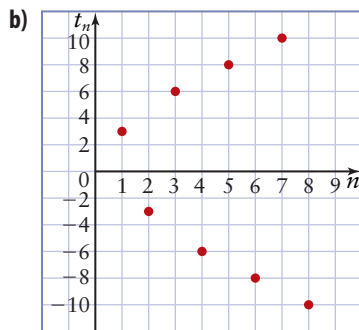
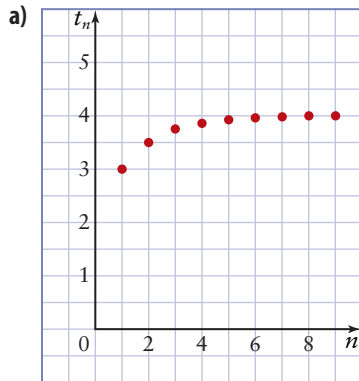
- C1** Explique dans quelles circonstances une suite admet une limite et dans quelles circonstances elle n'en admet pas.
- C2** Que t'apprennent la limite à gauche et la limite à droite sur le graphique d'une fonction ?
- C3** Comment peux-tu savoir si une fonction est continue ou discontinue à partir de son graphique ?
- C4** En quoi les limites aident-elles à déterminer si une fonction est continue ?

A À ton tour

1. Indique la limite de chaque suite, s'il y en a une. S'il n'y a pas de limite, explique pourquoi.

a) 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... b) 5,9, 5,99, 5,999, 5,999 9, 5,999 99, 5,999 999, ...	c) -2,0, -1,0, $-\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{4}$, 0, $-\frac{1}{8}$, 0, $-\frac{1}{16}$, 0, ... d) 3,1, 3,01, 3,001, 3,000 1, 3,000 01, ... e) -3, -2,9, -3, -2,99, -3, -2,999, -3, -2,999 9, ...
--	---

2. Indique la limite de chaque suite représentée, s'il y en a une. S'il n'y en a pas, explique pourquoi.



3. Soit $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -4$.
Qu'est-ce qui est vrai au sujet de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?
4. Soit $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$ et $f(-3) = 1$.
Qu'est-ce qui est vrai au sujet de $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$?
5. Soit $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ et $f(2) = 3$.
Qu'est-ce qui est vrai au sujet de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
6. Soit une fonction $y = f(x)$ pour laquelle
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ et $f(3) = -1$.
Indique si chaque énoncé est vrai ou faux et justifie ta réponse.
- $y = f(x)$ est continue en $x = 3$.
 - La limite de $f(x)$ à mesure que x tend vers 3 n'existe pas.
 - La valeur de la limite à gauche est 2.
 - La valeur de la limite à droite est -1 .
 - Quand $x = 3$, la valeur de y est 2.
7. a) Qu'est-ce qui est vrai au sujet du graphique de $y = h(x)$, si $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = 1$ et $h(-1) = 1$?
- b) Qu'est-ce qui est vrai si $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = -1$ et $h(-1) = 1$?

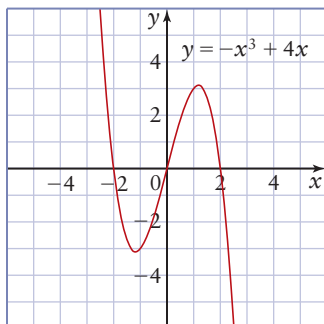
B Liens et mise en application

8. Le terme général d'une suite infinie est $\frac{2}{3^n}$.
- Écris les six premiers termes de la suite.
 - Explique pourquoi la limite de la suite est 0.
9. Le terme général d'une suite infinie est $n^3 - n^2$.
- Écris les six premiers termes de la suite.
 - Explique pourquoi la suite n'admet pas de limite.
10. Quel nombre particulier est représenté par la limite de la suite 3, 3,1, 3,14, 3,141, 3,141 5, 3,141 59, 3,141 592, ...?
11. Quelle fraction est équivalente à la limite de la suite 0,3, 0,33, 0,333, 0,333 3, 0,333 33, ...?
12. Pour chacune des suites ci-dessous:
- Indique la limite, s'il y a en une. S'il n'y en a pas, explique pourquoi. Trace un graphique.
 - Écris une expression à l'aide d'une limite qui représente le comportement de la suite.
- a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

b) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, 2^{2-n}, \dots$

c) $4, 5\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 5\frac{1}{4}, 4\frac{4}{5}, 5\frac{1}{6}, \dots, 5 + \frac{(-1)^n}{n}, \dots$

13. Examine le graphique ci-dessous.



a) Indique le domaine de la fonction.

b) Évalue ces éléments :

i) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (-x^3 + 4x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^3 + 4x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^3 + 4x)$ iv) $f(-2)$

c) La fonction est-elle continue en $x = -2$?
Explique ta réponse.

14. Le mouvement d'un pendule est représenté approximativement par la fonction $T(l) = 2\sqrt{l}$, où T est le temps, en secondes, et l , la longueur du pendule, en mètres.

a) Évalue $\lim_{l \rightarrow 0^+} 2\sqrt{l}$.

b) Que signifie le résultat en a) ?

c) Représente graphiquement la fonction.
Comment le graphique confirme-t-il le résultat en a) ?

MATHS ET MONDE

Les rapports entre les termes consécutifs de la suite de Fibonacci tendent vers le nombre d'or, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ce nombre est aussi appelé

nombre de Fibonacci. Quel lien existe-t-il entre ce nombre et tes résultats de la question 15 ? Effectue une recherche pour en savoir plus sur ce nombre en général, dans la nature, dans les arts et en design.

15. Une **suite définie par récurrence** est une suite dont le n^{e} terme, t_n , est défini en fonction des termes précédents, t_{n-1} , t_{n-2} , etc.



L'une des suites récurrentes les plus connues est la suite de Fibonacci, créée par Leonardo Pisano (1170–1250). Les termes de cette suite sont définis comme suit : $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, où $n \geq 3$.



a) Transcris ce tableau, puis remplis-le. Dans la quatrième colonne, évalue chaque rapport à la sixième décimale.

n	f_n	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$	Valeur décimale
1	1		
2	1	$\frac{1}{1}$	
3	2	$\frac{2}{1}$	
4	3		
5			
6			
7			
8			
9			
10			

b) Vers quelle valeur les rapports tendent-ils ?
Prédis la valeur de la limite des rapports.

c) Calcule trois autres rapports.

d) Représente graphiquement les couples $(1, 1)$, $(2, 2)$, ..., (n, r_n) , où n représente le rang du rapport et r_n , sa valeur à six décimales près. Comment ton graphique confirme-t-il la valeur en b) ?

e) À l'aide d'une limite, écris une expression qui représente la valeur des rapports des termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

16. a) Construis une table de valeurs pour déterminer les limites en i) et en ii). Puis, utilise tes résultats pour déterminer la limite en iii).

i) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{4-x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{4-x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4-x}$

- b) **Technologie** Représente graphiquement la fonction en a) à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Comment le graphique confirme-t-il tes résultats en a) ?

17. a) Construis une table de valeurs pour déterminer les limites en i) et en ii). Puis, utilise tes résultats pour déterminer la limite en iii).

i) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{x+2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{x+2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+2}$

- b) **Technologie** Représente graphiquement la fonction en a) à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Comment le graphique confirme-t-il tes résultats en a) ?

C Approfondissement et défis

18. a) Tu déposes 1 \$ pour 1 an dans un compte d'épargne au taux d'intérêt annuel de 100 %. Calcule le solde au compte après 1 an si l'intérêt est composé :

i) une fois l'an

ii) deux fois l'an

iii) chaque mois

iv) chaque jour

v) chaque minute

vi) chaque seconde

- b) Quel lien existe-t-il entre la situation décrite en a) et la suite ci-dessous ?

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \dots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

- c) Effectue une recherche pour découvrir le lien entre la limite de la suite en b) et le nombre d'Euler, e .

19. Une **fraction continue** est une expression de la forme

$$x = a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \frac{b_3}{a_4 + \frac{b_4}{a_5 + \frac{b_5}{a_6 + \frac{b_6}{\ddots}}}}}}$$

où a_1 est un nombre entier et tous les autres

nombre a_n et b_n sont des entiers positifs. Détermine la limite de la fraction continue ci-dessous. Quel nombre particulier représente-t-elle ?

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}$$

20. Détermine la limite de la suite ci-dessous. (Indice : Exprime chaque terme comme une puissance de 3.)

$$\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}, \dots$$

21. **Concours de maths** Le n ième terme de la suite A est $n^2 - 10n + 70$. Les trois premiers termes de la suite sont 61, 54, 49. La suite B est une suite arithmétique dont la raison est 10. Ses trois premiers termes sont 5, 15, 25. Détermine toutes les valeurs de n pour lesquelles le n ième terme des deux suites est identique.

22. **Concours de maths** Détermine la ou les valeurs de k si $(3, k)$ est un point de la courbe de $x^2y - y^2x = -30$.

Les limites et la continuité

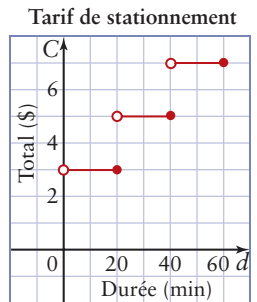
Une conductrice gare sa voiture dans un stationnement. Le tarif de stationnement est de 3 \$ pour 20 minutes ou moins, puis de 2 \$ pour chaque période additionnelle de 20 minutes ou moins. Quelle somme la conductrice devra-t-elle payer pour 1 h ?

Voici la fonction qui représente cette situation :

$$C(d) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 < d \leq 20 \\ 5 & \text{si } 20 < d \leq 40 \\ 7 & \text{si } 40 < d \leq 60 \end{cases}$$

où $C(d)$ est le coût du stationnement, en dollars, et d , la durée, en minutes. Il s'agit d'une **fonction définie par intervalles**, c'est-à-dire une fonction composée de parties de deux ou plusieurs fonctions. Ces parties correspondent chacune à un intervalle particulier à l'intérieur du domaine. D'après le graphique de cette fonction, la conductrice doit 7 \$ pour 1 h.

Remarque les coupures dans le graphique. Cette fonction particulière se nomme « fonction en escalier », car les segments de droite horizontaux de son graphique ressemblent aux marches d'un escalier. La fonction est discontinue aux points de coupure. Les fonctions discontinues représentent de nombreuses situations de la vie courante. Dans cette section, tu verras divers exemples de ce type de fonctions.



Explore A

Quand une fonction est-elle discontinue ?

- Technologie** Représente graphiquement chaque fonction à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, puis reproduis le graphique dans ton cahier de notes.

(Indice : Appuie sur **ZOOM** et sélectionne **4: ZDecimal** pour réinitialiser les paramètres de la fenêtre d'affichage.)

a) $\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$

- Compare les graphiques des deux fonctions de l'étape 1.
 - Quelle fonction présente un graphique avec une **asymptote verticale** ? Une asymptote est une droite de laquelle une courbe s'approche sans jamais l'atteindre.
 - Quelle fonction présente un graphique coupé ?
 - Réflexion** Explique dans tes mots ce que signifie le fait qu'une fonction est continue ou discontinue.

Matériel

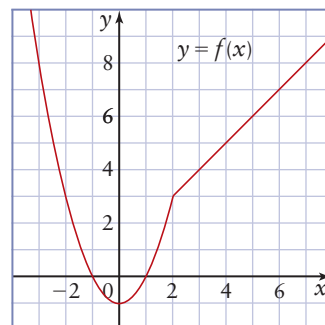
- calculatrice à affichage graphique

Facultatif

- Fathom
- Cybergéomètre

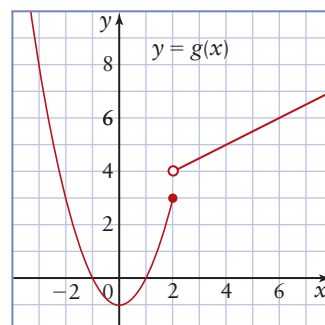
1. a) Examine le graphique A. Est-il continu? Explique ta réponse.
- b) Détermine les valeurs suivantes à partir du graphique A :
 - i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 - ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 - iii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 - iv) $f(2)$
- c) Compare les valeurs obtenues en b). Que remarques-tu?
- d) **Réflexion** Comment les valeurs en b) confirment-elles ta réponse en a)?

Graphique A



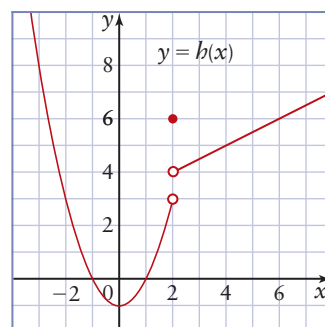
2. a) Examine le graphique B. Est-il continu? Explique ta réponse.
- b) Détermine les valeurs suivantes à partir du graphique B :
 - i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$
 - ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$
 - iii) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$
 - iv) $g(2)$
- c) Compare les valeurs obtenues en b). Que remarques-tu?
- d) **Réflexion** Comment les valeurs en b) confirment-elles ta réponse en a)?

Graphique B



3. a) Examine le graphique C. Est-il continu? Explique ta réponse.
- b) Détermine les valeurs suivantes à partir du graphique C :
 - i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$
 - ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$
 - iii) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$
 - iv) $h(2)$
- c) Compare les valeurs obtenues en b). Que remarques-tu?
- d) **Réflexion** Comment les valeurs en b) confirment-elles ta réponse en a)?

Graphique C



4. **Réflexion** Utilise tes résultats des étapes 1 à 3.
 - a) Décris les ressemblances et les différences entre les graphiques A, B et C.
 - b) Explique comment les limites peuvent servir à déterminer si une fonction est continue ou discontinue.

Jusqu'à maintenant, dans la plupart des exemples, tu as déterminé la limite à l'aide d'un graphique. C'est une méthode très utile. Toutefois, on peut aussi déterminer une limite de façon algébrique. Le tableau suivant présente les propriétés des limites. Tu peux les utiliser pour calculer la limite, sans l'aide d'un graphique. On suppose ici que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent et que c représente une constante quelconque.

Les propriétés des limites	
Propriété	Description
1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$	La limite d'une constante est égale à la constante.
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$	La limite de la fonction identité lorsque x s'approche de a est égale à a .
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	La limite d'une somme de fonctions est égale à la somme des limites.
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	La limite d'une différence de fonctions est égale à la différence des limites.
5. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	La limite du produit d'une constante et d'une fonction est égale à la constante multipliée par la limite de la fonction.
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	La limite d'un produit de fonctions est égale au produit des limites.
7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$	La limite d'un quotient de fonctions est égale au quotient des limites, si le dénominateur n'est pas égal à 0.
8. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$, où n est un nombre rationnel.	La limite d'une puissance est égale à la puissance de la limite, si l'exposant est un nombre rationnel.
9. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, si la racine du nombre de droite existe.	La limite d'une racine est la racine de la limite, si cette racine existe.

Exemple 1

Évaluer la limite d'une fonction de façon algébrique à l'aide des propriétés des limites

Évalue chaque limite, si elle existe, puis indique la ou les propriétés utilisées.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^4 - 5x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{2x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 3)(5x^2 + 2)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x - 2}$

Solution

Il faut souvent utiliser plus d'une propriété pour évaluer une limite.

- a) Utilise la propriété 1.

$$\lim_{x \rightarrow -1} 5 = 5$$

- b) Utilise les propriétés 1, 2, 4, 5 et 8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (3x^4 - 5x) \\&= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^4 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x \\&= 3(2)^4 - 5(2) \\&= 38\end{aligned}$$

- c) Utilise les propriétés 1, 2, 3, 5 et 9.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{2x + 5} \\&= \sqrt{2 \lim_{x \rightarrow -3} x + \lim_{x \rightarrow -3} 5} \\&= \sqrt{2(-3) + 5} \\&= \sqrt{-1}\end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{-1}$ n'est pas un nombre réel, $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{2x + 5}$ n'existe pas.

- d) Utilise les propriétés 1, 2, 3, 4, 7 et 8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3} \\&= \frac{\left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right)^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 4}{\left(\lim_{x \rightarrow -1} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 3} \\&= \frac{(-1)^2 - 4}{(-1)^2 + 3} \\&= \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

- e) Utilise les propriétés 1, 2, 3, 4, 5 et 8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (x - 3)(5x^2 + 2) \\&= \left[\lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 3 \right] \left[5 \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} 2 \right] \\&= (0 - 3)(5(0)^2 + 2) \\&= -6\end{aligned}$$

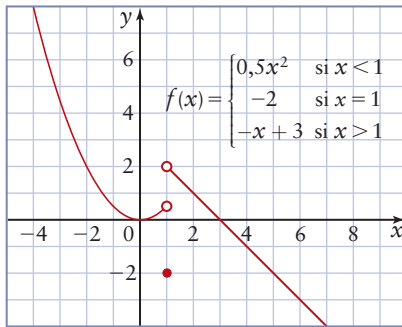
f) Utilise les propriétés 1, 2, 4, 5 et 7.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-2} &= \frac{5 \lim_{x \rightarrow 2} x}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 2} \\ &= \frac{5(2)}{2-2} \\ &= \frac{10}{0} \end{aligned}$$

La division par zéro est indéfinie, donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-2}$ n'existe pas.

Exemple 2 Les limites et les discontinuités

Examine ce graphique.



a) Indique le domaine de la fonction.

b) Évalue les éléments suivants :

i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ iv) $f(1)$

c) La fonction est-elle continue ou discontinue en $x = 1$? Explique ta réponse.

Solution

a) La fonction est définie pour toute valeur de x . Le domaine de x comprend donc tous les nombres réels, d'où $x \in \mathbb{R}$.

b) i) Le graphique de la fonction à droite de 1 est représenté par une droite dont la valeur de y tend vers 2. Donc, d'après le graphique,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$

On peut vérifier ce résultat à l'aide de l'équation correspondant aux valeurs de x à droite de 1. Si tu substitues 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 3) = -1 + 3 = 2.$$

II) Si tu suis le graphique à partir de la gauche de 1, la valeur de y tend vers 0,5. Donc, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0,5$.

Tu peux aussi utiliser l'équation qui correspond aux valeurs de x à gauche de 1. Si tu substitues 1 à x $\lim_{x \rightarrow 1^-} 0,5x^2 = 0,5(1)^2 = 0,5$.

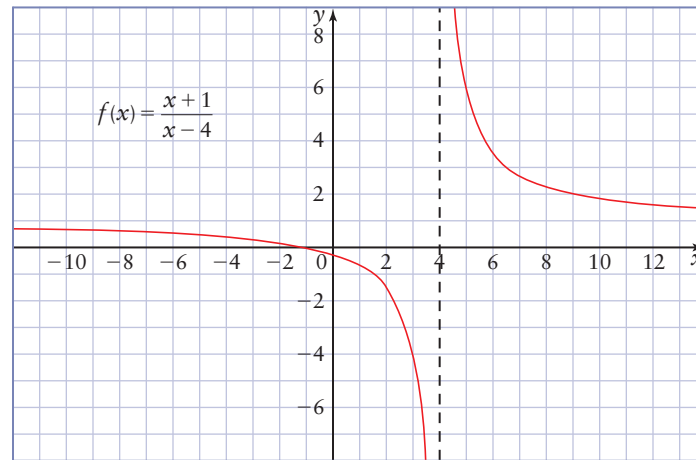
III) Puisque la limite à gauche et la limite à droite ne sont pas égales, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas.

IV) D'après le graphique, le point fermé $(1, -2)$ indique que $f(1) = -2$.

c) En $x = 1$, les limites unilatérales existent, mais elles ne sont pas égales. La fonction est coupée ou discontinue en $x = 1$. La valeur de y sur le graphique passe de 0,5 à 2 en $x = 1$. Ce type de discontinuité se nomme **discontinuité en un point** ou « saut ».

Exemple 3 Les limites comprenant des asymptotes

Examine ce graphique, puis réponds aux questions.



a) Indique le domaine de la fonction.

b) Évalue les éléments suivants :

i) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+1}{x-4}$ II) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{x-4}$ III) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-4}$ IV) $f(4)$

c) La fonction est-elle continue ou discontinue en $x = 4$? Explique ta réponse.

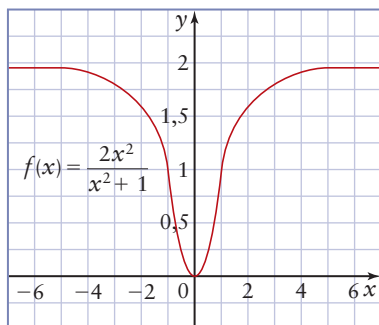
Solution

a) La fonction qui correspond à $y = \frac{x+1}{x-4}$ est non définie quand le dénominateur égale 0, c'est-à-dire lorsque $x = 4$. Le domaine est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$.

- b) i) Sur la courbe, lorsque x s'approche de 4 par la droite, les valeurs de y augmentent sans limite. Il y a une asymptote verticale en $x = 4$. La limite à droite n'existe pas. Le symbole $+\infty$ sert à exprimer le comportement de la courbe. Donc, $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+1}{x-4} = +\infty$.
- ii) Sur la courbe, lorsque x s'approche de 4 par la gauche, les valeurs de y diminuent sans limite. La limite à gauche n'existe pas. Le symbole $-\infty$ sert à exprimer le comportement de la courbe. Donc, $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{x-4} = -\infty$.
- iii) D'après les résultats en i) et en ii), $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-4}$ n'existe pas.
- iv) Puisque la fonction est non définie si $x = 4$, $f(4)$ n'existe pas.
- c) Cette fonction est non définie en $x = 4$. Puisque les valeurs de y augmentent ou diminuent sans limite lorsque x s'approche de 4, cette fonction a une **discontinuité infinie** en $x = 4$.

Exemple 4 Continue ou non ?

Examine ce graphique, puis réponds aux questions.



- a) Indique le domaine de la fonction.
- b) Évalue les éléments suivants :
- i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ iv) $f(0)$
- c) Cette fonction est-elle continue ou discontinue en $x = 0$? Explique ta réponse.

Solution

- a) La fonction correspondant à $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ est définie pour toutes les valeurs de x . Donc, le domaine est $x \in \mathbb{R}$.
- b) i) Sur le graphique, lorsque x s'approche de 0 par la gauche, tu vois que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 0$.

Tu peux aussi déterminer la limite à partir de l'équation, en substituant

$$0 \text{ à } x. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \frac{2(0)^2}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

II) Sur le graphique, lorsque x s'approche de 0 par la droite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 0.$$

III) En I) et en II), la limite à gauche et la limite à droite en $x = 0$

$$\text{égale } 0. \text{ Donc, la limite existe et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 0.$$

IV) Le point $(0, 0)$ est sur le graphique, donc $f(0) = 0$.

c) La fonction est continue pour toutes les valeurs de x , puisqu'il n'y a pas de coupure dans le graphique.

Exemple 5 Les limites de forme indéterminée

Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(1+x)^2 - 4}{x+3}$

Solution

a) Si tu substitues $x = 1$ dans l'équation, tu obtiens la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

La fonction n'est pas définie en ce point. Toutefois, une limite peut exister même si la fonction n'est pas définie en $x = a$. La forme indéterminée signifie simplement qu'il est impossible de déterminer la limite par substitution. Tu dois trouver une fonction équivalente qui représente $f(x)$ pour toutes les valeurs de x autres que $x = a$.

La méthode habituelle pour calculer la limite d'une forme indéterminée consiste à trouver les facteurs qui donnent $\frac{0}{0}$, et à simplifier avant de prendre la limite. Dans ce type de problème, factorise l'expression pour ensuite la simplifier avant de lever l'indétermination. On dit d'une telle fonction qu'elle a un « trou » ou une **discontinuité apparente**.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{x-2} \\ &= \frac{1-5}{1-2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Tu peux diviser par $(x-1)$, car $x \neq 1$.

- b) Substituer $x = 0$ dans l'équation donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Comme il est impossible de factoriser cette expression, il faut utiliser une autre méthode pour trouver la limite. Rationalise le numérateur pour simplifier l'expression et pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{4+x} + 2}{\sqrt{4+x} + 2} \quad \text{Rationalise le numérateur en multipliant par} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x})^2 - 2^2}{x(\sqrt{4+x} + 2)} \quad \text{Pense : } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2. \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4+x} + 2)} \quad \text{Divise par } x, \text{ puisque } x \neq 0. \\
 &= \frac{1}{(\sqrt{4+0} + 2)} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

- c) Substituer $x = -3$ dans l'équation donne la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Écris le numérateur sous sa forme développée. Puis, simplifie l'expression par factorisation pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(1+x)^2 - 4}{x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 + 2x + x^2 - 4}{x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x+3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)} \quad \text{Factorise le numérateur.} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) \quad x \neq -3 \\
 &= -3 - 1 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

Exemple 6 Analyser un problème de gestion à l'aide des limites

Le gérant du Café Mousseux détermine que la demande pour une nouvelle saveur de café est représentée par la fonction $D(p)$, où p représente le prix d'une tasse, en dollars, et D , le nombre de tasses vendues à ce prix.

$$D(p) = \begin{cases} \frac{16}{p^2} & \text{si } 0 < p \leq 4 \\ 0 & \text{si } p > 4 \end{cases}$$

a) Détermine la valeur de chaque limite, si elle existe.

$$\text{i) } \lim_{p \rightarrow 4^-} D(p) \qquad \text{ii) } \lim_{p \rightarrow 4^+} D(p) \qquad \text{iii) } \lim_{p \rightarrow 4} D(p)$$

b) Interprète ces limites.

c) **Technologie** Représente graphiquement la fonction à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Comment le graphique confirme-t-il tes résultats en a) ?

Solution

a) i) Pour déterminer la limite à gauche, utilise la fonction définie pour $p < 4$, soit $D(p) = \frac{16}{p^2}$.

Utilise les propriétés 1, 2, 6 et 7 des limites.

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 4^-} D(p) &= \lim_{p \rightarrow 4^-} \frac{16}{p^2} \\ &= \frac{16}{4^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii) Pour déterminer la limite à droite, utilise la fonction définie pour $p > 4$, soit $D(p) = 0$.

Utilise la propriété 1 des limites.

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 4^+} D(p) &= \lim_{p \rightarrow 4^+} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii) Puisque $\lim_{p \rightarrow 4^-} D(p) \neq \lim_{p \rightarrow 4^+} D(p)$, $\lim_{p \rightarrow 4} D(p)$ n'existe pas.

b) $\lim_{p \rightarrow 4^-} D(p) = 1$ signifie qu'à mesure que le prix du café s'approche de 4 \$, le nombre de cafés vendus tend vers 1.

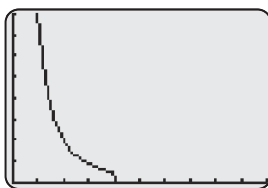
$\lim_{p \rightarrow 4^+} D(p) = 0$ signifie qu'on ne vend aucun café quand le prix est supérieur à 4 \$.

- c) Représente graphiquement cette fonction définie par intervalles à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.

```

F1>F1 F1>F2 F1>F3
Y1=(16/X^2)(0<X)
(X≤4)
Y2=(0)(X>4)
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=

```



Paramètres
d'affichage:
 $x \in [0, 10]$, $y \in [0, 16]$,
Yscl = 2

Le graphique montre que le nombre de cafés vendus diminue à mesure que le prix s'approche de 4 \$. Quand le prix est supérieur à 4 \$, on ne vend aucun café.

Conseil techno ::

Quand tu dois indiquer à la calculatrice un domaine défini par des conditions multiples, comme $0 < x \leq 4$, saisis chaque condition séparément. Dans ce cas-ci, saisis $(0 < x)(x \leq 4)$.

Pour accéder aux symboles relationnels, tels que $<$ et $>$, appuie sur **2ND** puis sur **MATH** pour afficher le menu **TEST**.

CONCEPTS CLÉS

- La limite d'une fonction en $x = a$ peut exister même si la fonction est discontinue en $x = a$. Une fonction peut avoir un saut (discontinuité en un point), une discontinuité infinie ou un trou (discontinuité apparente).
- On ne peut pas tracer le graphique d'une fonction discontinue sans lever le crayon.
- Quand substituer a à x résulte en une limite de forme indéterminée, $\frac{0}{0}$, il faut trouver une fonction équivalente qui représente $f(x)$ pour toutes les valeurs de x autres que $x = a$. On peut supprimer la discontinuité à l'aide d'une de ces quatre méthodes : la factorisation, la rationalisation du numérateur ou du dénominateur, le développement et la simplification, ainsi que multiplier par le conjugué.

Communication et compréhension

- C1** Comment une fonction peut-elle avoir une limite, L , lorsque x tend vers a , alors que $f(a) \neq L$?
- C2** Donne un exemple d'une fonction qui admet une limite en $x = a$, mais qui n'est pas définie en $x = a$.
- C3** Quelle est l'utilité des propriétés des limites quand on évalue des limites de façon algébrique?
- C4** Décris les types de discontinuités qu'un graphique peut avoir. Pourquoi le nom de ces discontinuités a-t-il du sens?
- C5**
 - a) Qu'est-ce qu'une forme indéterminée?
 - b) Décris des méthodes qui permettent d'évaluer les limites ayant une forme indéterminée.

A À ton tour

1. Une fonction a un point ouvert en $x = 3$. Que peux-tu dire au sujet de son graphique?
2. Une fonction a une asymptote verticale en $x = 6$. Que peux-tu dire au sujet de son graphique?
3. Chacune des tables de valeurs ci-dessous correspond à une fonction $y = f(x)$. Détermine le ou les points où chaque fonction est discontinue.

a)

X	Y1
-5	1.3333
-4	1.5
-3	2
-2	ERROR
-1	0
0	.5
1	.66667

X = -5

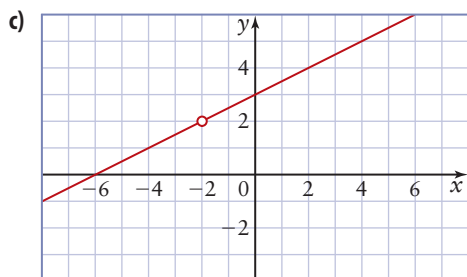
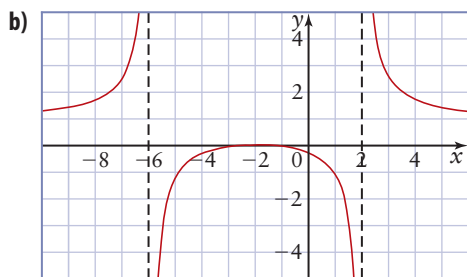
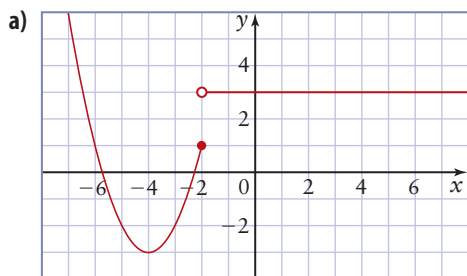
b)

X	Y1
-4	-.6
-3	ERROR
-2	.33333
-1	0
0	-.3333
1	ERROR
2	.6

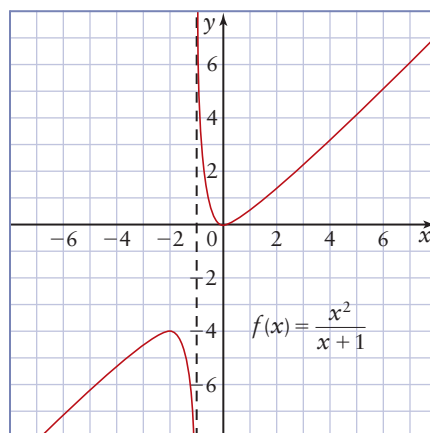
X = -4

B Liens et mise en application

4. Détermine le ou les points de discontinuité de chacun des graphiques ci-dessous. Explique ta réponse à l'aide des limites. Indique s'il s'agit d'une discontinuité en un point, infinie ou apparente.



5. Examine le graphique suivant:



- a) Indique le domaine de la fonction.

- b) Évalue chaque expression.

i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x + 1}$

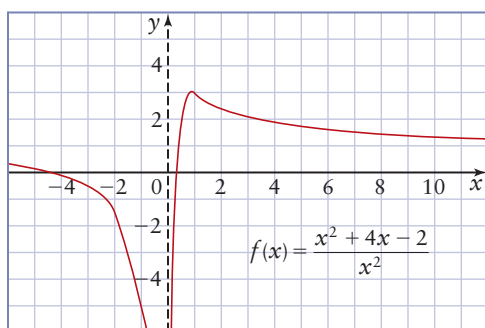
ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x + 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x + 1}$

iv) $f(-1)$

- c) La fonction est-elle continue ou discontinue? Explique ta réponse.

6. Examine le graphique suivant :



a) Indique le domaine de la fonction.

b) Évalue chaque expression.

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x - 2}{x^2}$

iv) $f(0)$

c) La fonction est-elle continue ou discontinue? Explique ta réponse.

7. Chacune des tables de valeurs ci-dessous correspond au graphique d'une fonction $y = f(x)$.

a)

x	y ₁
-3.03	-33.33
-3.02	-50
-3.01	-100
-3	333.33
-2.99	100
-2.98	50
-2.97	33.333

V₁=ERROR

b)

x	y ₁
1.97	-4312
1.98	-9801
1.99	-38601
2	38801
2.01	40401
2.02	10201
2.03	-4579

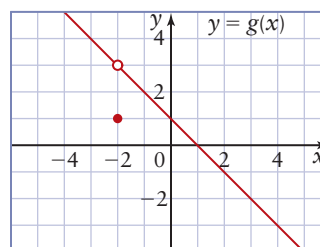
V₁=ERROR

i) Qu'indique le terme ERROR sur le graphique de $y = f(x)$ en ce point?

ii) Écris des expressions pour la limite à gauche et la limite à droite qui confirment ta réponse en i).

iii) Trace la partie du graphique près de chaque valeur de x mentionnée en i).

8. Utilise le graphique de $y = g(x)$ pour évaluer les expressions qui suivent.



a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$

d) $g(-2)$

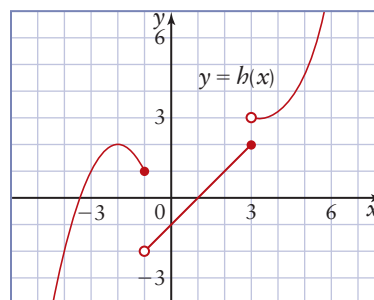
e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

h) $g(1)$

9. Utilise le graphique de $y = h(x)$ pour évaluer les expressions qui suivent.



a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

d) $h(-1)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$

h) $h(3)$

10. Évalue chaque limite, si elle existe. Puis, indique les propriétés utilisées. Si la limite n'existe pas, explique pourquoi.

a) $\lim_{x \rightarrow 6} 8$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{6x + 2}{x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{8 - x}$

11. Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x)^2 - 16}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(3-x)^2 - 9}{x-6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{49 - (5+x)^2}{x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{x}}{x-3}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x+2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - 3x + 3}$

12. Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{5 - \sqrt{x}}{x-25}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+3}}{x}$

13. Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x+2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{x+5x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x+3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x^2 - 4x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{25 - x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x - 6}$

g) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 11x - 4}{x^2 + 3x - 4}$

14. Représente graphiquement cette fonction définie par intervalles:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Détermine la valeur de chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

15. Le tarif d'un service de limousine est de 3,50 \$ le premier kilomètre, puis de 0,75 \$ pour chaque kilomètre additionnel ou partie de kilomètre. Une limousine prend un passager à l'aéroport et parcourt 7,5 km.



- Trace un graphique qui représente cette situation.
- Quel type de fonction ce graphique représente-t-il? Explique ta réponse.
- Où la fonction est-elle discontinue? De quel type de discontinuité s'agit-il?

16. Le coût d'expédition d'un colis par messagerie varie selon la masse du colis. Il est de :

- 2,50 \$ pour 100 g ou moins,
- 3,75 \$ pour plus de 101 g jusqu'à 200 g,
- 6,50 \$ pour plus de 201 g jusqu'à 500 g,
- 10,75 \$ pour plus de 500 g.

- Trace un graphique qui représente cette situation.
- Quel type de fonction ce graphique représente-t-il? Explique ta réponse.
- Où la fonction est-elle discontinue? De quel type de discontinuité s'agit-il?

17. Esquisse le graphique d'une fonction $y = f(x)$ qui répond à chaque ensemble de conditions.

- $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 1$ et $f(5) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ et $f(-1) = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4$ et $f(2) = -4$

18. Esquisse le graphique de chaque fonction ci-dessous. Détermine si chaque fonction est continue ou discontinue. Indique la ou les valeurs de x où il y a une discontinuité. Explique tes réponses.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -4 \\ 5 & \text{si } -4 < x \leq 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

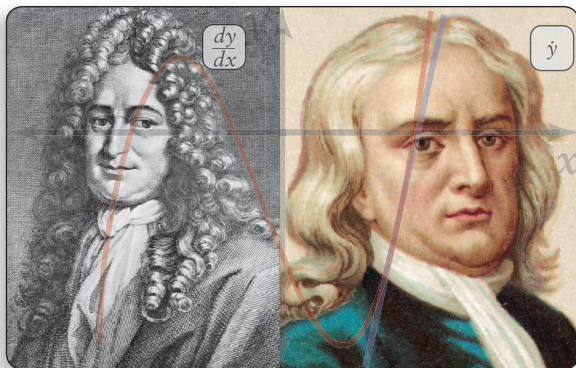
b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

C Approfondissement et défis

19. Soit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$. Détermine chaque limite à l'aide des propriétés des limites.
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} [4f(x) - 1]$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^3$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)]^2}{\sqrt{3 - f(x)}}$
20. Soit $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x - b & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
- a) Détermine des valeurs de a et de b susceptibles de rendre la fonction discontinue.
- b) Trace le graphique de la fonction.
- c) Détermine chacune des valeurs suivantes, si elle existe:
- i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- iii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ iv) $f(-1)$
21. Réponds à nouveau à la question 20 avec des valeurs a et b qui rendent la fonction continue.
22. a) Écris une fonction $f(x)$ discontinue en $x = 2$ telle que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$.
- b) Écris une fonction $f(x)$ discontinue en $x = 2$ telle que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$.
23. a) Représente graphiquement $y = \sqrt{16 - x^2}$.
- b) Évalue $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{16 - x^2}$.
- c) Utilise ton graphique en a) pour expliquer pourquoi $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{16 - x^2}$ n'existe pas.
- d) Quelle conclusion peux-tu tirer au sujet de $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{16 - x^2}$?
24. Évalue chaque limite, si elle existe.
- a) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{8 - x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x^3 - 13x^2 + x + 2}{x - 2}$
25. a) Trace le graphique d'une fonction $y = f(x)$ qui répond à toutes les conditions suivantes:
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
 - $f(4) = 3$ et $f(6) = 1$
- b) Écris une équation possible pour cette fonction. Explique ton choix.
26. **Concours de maths** Résous $6^{x+1} - 6^x = 3^{x+4} - 3^x$ pour toutes les valeurs réelles de x .
27. **Concours de maths** Détermine toutes les valeurs de x telles que $(6x^2 - 3x)(2x^2 - 13x - 7)(3x + 5) = (2x^2 - 15x + 7)(6x^2 + 13x + 5)$.
28. **Concours de maths** Détermine l'angle aigu x qui vérifie l'équation $\log_{(2 \cos x)} 6 + \log_{(2 \cos x)} \sin x = 2$.

Une introduction aux dérivées

Tout au long du chapitre, tu as calculé le taux de variation instantané à l'aide de différentes méthodes. Grâce aux concepts explorés jusqu'à présent, tu peux maintenant aborder l'étude d'une opération complexe, la **dérivation**. Il s'agit de l'un des outils les plus importants et puissants du calcul différentiel. Ce concept a été élaboré il y a plus de deux cents ans par Sir Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Leibniz (1646-1716). Le résultat de cette opération se nomme la **dérivée**. La dérivée peut servir à calculer la pente de la tangente en *n'importe quel* point du domaine d'une fonction.



Gottfried Leibniz

Sir Isaac Newton

Explore

Créer une fonction dérivée sur une calculatrice à affichage graphique

Matériel

- calculatrice à affichage graphique

MATHS ET MONDE

On peut également créer une fonction dérivée à l'aide du *Cybergéomètre*.

- Représente graphiquement $y = x^2$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
- Utilise la fonction **Tangent** pour tracer la tangente à chaque point correspondant aux valeurs de x dans le tableau. Note la pente de la tangente à partir de l'équation qui apparaît à l'écran.

x	Pente (m) de la tangente
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

- Appuie sur **[STAT]** pour accéder au menu **EDIT**. Sélectionne **1:Edit**. Entre les valeurs du tableau dans les listes **L1** et **L2**. Crée un nuage de points. Que représentent les valeurs de y dans ce graphique par rapport au graphique initial ?
- Réflexion** Quel type de fonction le nuage de points représente-t-il ? Quel type de régression dois-tu sélectionner dans le menu **[STAT] CALC** pour ces données ?
- Effectue la régression choisie, puis note l'équation.

6. **Réflexion** L'équation de régression représente la fonction dérivée. Compare l'équation initiale avec l'équation de la dérivée. Quelle relation remarques-tu ?
7. Refais les étapes 1 à 6 pour les équations $y = x$ et $y = x^3$.
8. **Réflexion** D'après les résultats obtenus aux étapes 1 à 7, quel lien existe-t-il entre le graphique de $y = f(x)$ et le graphique dérivé $y = f'(x)$, quand $f(x)$ est une fonction :
 - a) affine ?
 - b) du second degré ?
 - c) cubique ?
9. Prédis la dérivée d'une fonction constante. Donne un exemple.
10. **Réflexion** Reporte-toi aux pentes des tangentes notées dans le tableau pour chaque fonction initiale des étapes 1 à 7. Quel lien existe-t-il entre :
 - a) le signe des pentes et le comportement du graphique de la fonction pour les valeurs de x correspondantes ?
 - b) le comportement de la fonction pour les valeurs de x où la pente est 0 ?

MATHS ET MONDE

$f'(x)$ (qui se lit « f prime de x ») est une façon de noter une dérivée inventée par le mathématicien français Joseph Louis Lagrange (1736-1813). On peut aussi écrire simplement y' . Tu apprendras différentes façons de noter les dérivées plus loin dans cette section.

On peut aussi déterminer la dérivée d'une fonction à l'aide de la **définition de la dérivée selon les principes de base**. Pour comprendre ce concept, souviens-toi de la formule de la pente de la tangente en un point a :

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si tu remplaces la variable a par la variable indépendante x , tu obtiens la définition de la dérivée selon les principes de base.

La définition de la dérivée selon les principes de base

La dérivée d'une fonction $f(x)$ est une nouvelle fonction $f'(x)$ définie par

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ si la limite existe.}$$

Quand on simplifie cette limite en laissant $h \rightarrow 0$, il en résulte une expression en fonction de x . Cette expression peut servir à déterminer la dérivée de la fonction pour *n'importe quelle* valeur de x qui appartient au domaine de la fonction.

Exemple 1 Déterminer une dérivée par les principes de base

- a) Indique le domaine de la fonction $f(x) = x^2$.
- b) Détermine la dérivée de $f(x) = x^2$ à l'aide de la définition selon les principes de base. Quel est le domaine de la dérivée ?
- c) Que remarques-tu au sujet de la nature de la dérivée ? Décris la relation qui existe entre la fonction et sa dérivée.

Solution

- a) La fonction du second degré $f(x) = x^2$ est définie pour tous les nombres réels x . Son domaine est donc $x \in \mathbb{R}$.
- b) Pour trouver sa dérivée, remplace $f(x + h)$ par $(x + h)^2$ et $f(x)$ par x^2 dans la définition selon les principes de base, puis simplifie l'expression.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} \quad \text{Divise par } h, \text{ puisque } h \neq 0. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$. Son domaine est $x \in \mathbb{R}$.

- c) Remarque que la dérivée est aussi une fonction. La fonction initiale, $f(x) = x^2$, est du second degré. Sa dérivée, $f'(x) = 2x$, est affine. La dérivée représente la pente de la tangente, ou le taux de variation instantané sur la courbe. Tu peux donc reporter toute valeur de x dans la dérivée pour déterminer le taux de variation instantané au point correspondant du graphique de la fonction initiale.

Exemple 2

Déterminer l'équation d'une tangente par les principes de base

- a) Utilise les principes de base pour dériver $f(x) = x^3$. Indique le domaine de la fonction et de sa dérivée.
- b) Représente graphiquement la fonction initiale et sa dérivée.
- c) Évalue les expressions suivantes, puis interprète les résultats:
- i) $f'(-2)$ ii) $f'(0)$ iii) $f'(1)$
- d) Détermine l'équation de chacune des tangentes qui correspondent aux valeurs obtenues en c).
- e) Trace le graphique de $f(x) = x^3$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique. Utilise la fonction **Tangent** pour confirmer l'équation de l'une des dérivées calculées en c).

Solution

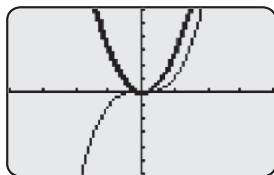
- a) La fonction cubique $f(x) = x^3$ est définie pour tous les nombres réels x .
Son domaine est donc $x \in \mathbb{R}$.

Détermine la dérivée. Remplace $f(x+h)$ par $(x+h)^3$ et $f(x)$ par x^3 dans la définition selon les principes de base.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

La dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$. La limite existe pour toute valeur de x . Donc, le domaine de $f'(x) = 3x^2$ est $x \in \mathbb{R}$.

- b) Sur une calculatrice à affichage graphique, entre les équations $Y1 = x^3$ et $Y2 = 3x^2$. Représente graphiquement la dérivée par un trait épais. Appuie sur **GRAPH**.



Paramètres d'affichage :
 $x \in [-4, 4], y \in [-6, 6]$

- c) Reporte les valeurs dans l'équation de la dérivée pour calculer la pente.

i) $f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$

La pente de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ en $x = -2$ est égale à 12.

ii) $f'(0) = 3(0)^2 = 0$

La pente de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ en $x = 0$ est égale à 0.

iii) $f'(1) = 3(1)^2 = 3$

La pente de la tangente à la courbe de $f(x) = x^3$ en $x = 1$ est égale à 3.

- d) Tu connais la pente pour chaque valeur de x indiquée. Détermine le point de tangence en calculant la valeur de y correspondante.

i) Quand $x = -2$, $y = -8$. Le point de tangence est $(-2, -8)$.

Reporte ces valeurs dans l'équation de la droite de la forme pente-point, $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Conseil techno



Pour choisir différents styles de trait pour ton graphique, amène le curseur dans la première colonne de l'écran **Y=**, puis appuie sur **ENTER**. Appuie plusieurs fois sur **ENTER** pour voir tous les styles.

$$y - (-8) = 12(x - (-2))$$

$$y = 12x + 24 - 8$$

$$y = 12x + 16$$

L'équation de la tangente est $y = 12x + 16$.

II) Quand $x = 0$, $y = 0$

Reporte $(x, y) = (0, 0)$ et $m = 0$ dans l'équation de la droite.

L'équation de la tangente est $y = 0$. Cette droite est l'axe des x .

III) Quand $x = 1$, $y = 1$

Reporte $(x, y) = (1, 1)$ et $m = 3$ dans l'équation de la droite.

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

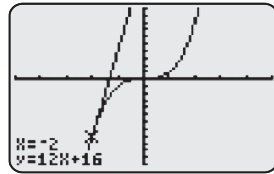
$$y = 3x - 2$$

L'équation de la tangente est $y = 3x - 2$.

e) Vérifie l'équation de la tangente pour $x = -2$.

Représente graphiquement la fonction $Y1 = x^3$.

Active la fonction **Tangent** et entre -2 . Appuie sur **ENTER**.



Paramètres d'affichage:

$x \in [-5, 5]$, $y \in [-12, 10]$.

L'équation de la tangente en $x = -2$ apparaît dans le coin inférieur gauche de l'écran de la calculatrice.

Avec la **notation de Leibniz** on exprime la dérivée de la fonction $y = f(x)$ sous la forme $\frac{dy}{dx}$. Cette notation peut aussi prendre la forme $\frac{d}{dx}f(x)$. En notation de Leibniz, l'expression $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a}$ signifie « la valeur de la dérivée quand $x = a$ ».

Tu peux utiliser la notation de Leibniz et la notation de Lagrange pour exprimer la dérivée. Il est parfois plus facile de représenter la dérivée à l'aide d'une forme simple, comme $f'(x)$. Toutefois, dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la notation de Leibniz, car elle indique clairement la relation à l'étude. Pour comprendre ce concept, souviens-toi que $\frac{dy}{dx}$ ne représente pas une fraction. Il s'agit plutôt du taux de variation d'une variable, y , par rapport à une autre variable, x . Les variables utilisées dépendent de la relation à l'étude. Par exemple, dans le cas d'une fonction qui représente

la relation entre le volume d'un gaz, V , et la température, t , tu peux écrire

$\frac{dV}{dt}$, ou le taux de variation du volume par rapport à la température.

Exemple 3

Résoudre un problème de taux de variation à l'aide d'une dérivée

La hauteur d'un javelot lancé dans les airs est représentée par la fonction $H(t) = -4,9t^2 + 10t + 1$, où H est la hauteur, en mètres, et t , le temps, en secondes.

- Détermine le taux de variation de la hauteur du javelot au temps t .
Exprime la dérivée en notation de Leibniz.
- Détermine le taux de variation de la hauteur du javelot après 3 s.

Solution

- Détermine d'abord la dérivée de la fonction par les principes de base.
Pour cela, reporte les valeurs de la fonction initiale dans la définition de la dérivée selon les principes de base, puis simplifie l'expression.

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(t+h) - H(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-4,9(t+h)^2 + 10(t+h) + 1] - (-4,9t^2 + 10t + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-4,9(t^2 + 2th + h^2) + 10t + 10h + 1] - (-4,9t^2 + 10t + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4,9t^2 - 9,8th - 4,9h^2 + 10t + 10h + 1 + 4,9t^2 - 10t - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4,9h^2 - 9,8th + 10h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4,9h - 9,8t + 10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -4,9h - 9,8t + 10 \\ \frac{dH}{dt} &= -9,8t + 10\end{aligned}$$

- Une fois la fonction dérivée déterminée, tu peux remplacer t par n'importe quelle valeur du domaine de la fonction. Pour $t = 3$,

$$\begin{aligned}\left. \frac{dH}{dt} \right|_{t=3} &= -9,8(3) + 10 \\ &= -19,4.\end{aligned}$$

Le taux de variation instantané de la hauteur du javelot après 3 s est $-19,4$ m/s.

MATHS ET MONDE

La partie b) offre un exemple d'un cas où il serait plus simple d'utiliser la notation $H'(3)$ pour représenter la dérivée.

Exemple 4 Dériver une fonction rationnelle simple

- a) Dérive la fonction $y = \frac{1}{x}$. Exprime la dérivée en notation de Leibniz.
- b) Représente graphiquement la fonction et sa dérivée à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
- c) Indique le domaine de la fonction et le domaine de sa dérivée. Comment les graphiques montrent-ils le domaine ?

Solution

- a) Utilise la définition de la dérivée selon les principes de base. Remplace

$f(x+h)$ par $\frac{1}{x+h}$ et $f(x)$ par $\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{1}{x+h} \times \frac{x}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} \times \frac{x+h}{x+h} \right) \right] \times \frac{1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{x}{(x+h)x} - \frac{(x+h)}{x(x+h)} \right] \times \frac{1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \right] \times \frac{1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cancel{h}}{(x+h)x\cancel{h}} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\&= -\frac{1}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Pour diviser, multiplie par l'inverse du dénominateur.

Multiplie par 1 pour obtenir un dénominateur commun.

- b) Sur une calculatrice à affichage graphique, entre les équations $Y1 = \frac{1}{x}$ et $Y2 = -\frac{1}{x^2}$. Choisis un trait épais pour représenter graphiquement la dérivée. Appuie sur **GRAPH**.

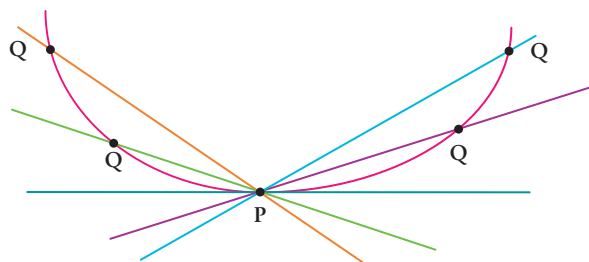


Paramètres d'affichage:
 $x \in [-2, 2]$, $y \in [-5, 5]$

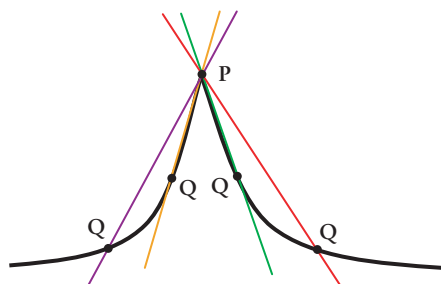
- c) La fonction $y = \frac{1}{x}$ et la fonction dérivée $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ sont toutes deux non définies quand le dénominateur est 0. Leur domaine est donc $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Zéro n'appartient pas au domaine, car les deux graphiques ont une asymptote verticale en $x = 0$.

Certains points d'une courbe peuvent ne pas avoir de dérivée. Par exemple, les fonctions discontinues sont **non dérivables** en tout point où elles sont discontinues. La fonction de l'exemple 4 n'est pas dérivable en $x = 0$.

Certaines fonctions continues sont aussi non dérivables en certains points. Examine le graphique des deux fonctions continues ci-dessous. Sur la courbe A, la pente de la sécante tend vers la pente de la tangente en P, à mesure que Q s'approche de P par les deux côtés. Cette fonction est dérivable en P. Toutefois, ce n'est pas le cas pour la courbe B. En effet, la limite de la pente de la sécante à mesure que Q s'approche de P par la gauche diffère de la limite de la pente de la sécante à mesure que Q s'approche de P par la droite. Cette fonction est donc non dérivable en P, même si elle est continue.



Courbe A



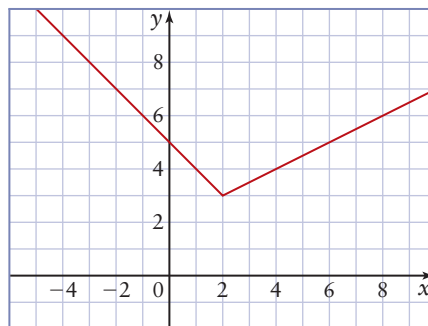
Courbe B

Le point P est un **point de rebroussement**.

Exemple 5

Reconnaître et vérifier le ou les points où une fonction est non dérivable

Une fonction définie par intervalles f est définie par $y = -x + 5$ pour $x \leq 2$ et $y = 0,5x + 2$ pour $x > 2$. Le graphique de f consiste en deux segments de droite qui forment un angle à $(2, 3)$. Ce genre de point s'appelle un **point anguleux**.



- a) D'après le graphique, quelle est la pente quand x s'approche de 2 par la gauche? Quelle est la pente quand x s'approche de 2 par la droite? Qu'est-ce que cela t'indique sur la dérivée en $x = 2$?
- b) À l'aide des principes de base, démontre que la dérivée $f'(2)$ n'existe pas.
- c) Représente graphiquement la pente de la tangente pour chaque valeur de x . Comment ce graphique confirme-t-il tes résultats en a) et en b)?

Solution

- a) La pente du graphique est -1 pour $x < 2$. Elle est $0,5$ pour $x > 2$. Les pentes ne tendent pas vers la même valeur à l'approche de $x = 2$. On peut donc supposer que la dérivée n'existe pas en ce point.
- b) À l'aide des principes de base,

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$

$f(2+h)$ génère différentes expressions selon que $h < 0$ ou $h > 0$. Tu dois donc calculer la limite à gauche et la limite à droite.

Pour la limite à gauche, quand $h < 0$,

$$f(2+h) = [-(2+h) + 5] = -h + 3.$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h + 3 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Pour la limite à droite, quand $h > 0$,

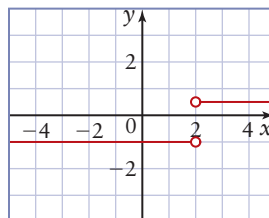
$$f(2+h) = [0,5(2+h) + 2] = 0,5h + 3.$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0,5h + 3 - 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} 0,5 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

Puisque la limite à gauche et la limite à droite ne sont pas égales, la dérivée n'existe pas en $x = 2$.

- c) Voici la représentation graphique de la pente de la tangente à chaque point de la fonction f .

Quand $x < 2$, la pente de la tangente à f est -1 .
 Quand $x > 2$, la pente de la tangente est $0,5$.
 Le graphique de la dérivée consiste donc en deux droites horizontales. Il est coupé en $x = 2$, où la pente du graphique de la fonction initiale f passe abruptement de -1 à $0,5$. La fonction f est non dérivable en ce point. Les cercles vides dans le graphique représentent ce concept.



CONCEPTS CLÉS

- La dérivée de $y = f(x)$ est une nouvelle fonction $y = f'(x)$. Elle représente la pente de la tangente ou le taux de variation instantané en tout point de la courbe de $y = f(x)$.
- La fonction dérivée correspond à la définition selon les principes de base,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ si la limite existe.}$$
- Les différentes notations pour la dérivée de $y = f(x)$ sont $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d}{dx}f(x)$.
- Si la dérivée n'existe pas en un point de la courbe, la fonction est non dérivable en cette valeur de x . Cela se produit là où une fonction est discontinue, là où elle admet une tangente verticale ou là où elle connaît un changement abrupt, représenté par un **point anguleux** ou un **point de rebroussement** dans le graphique.

Communication et compréhension

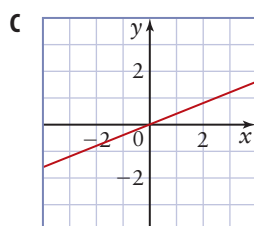
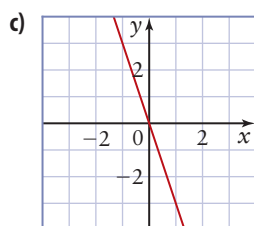
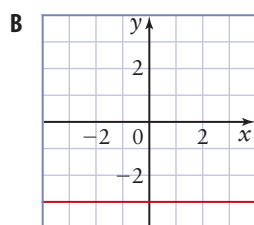
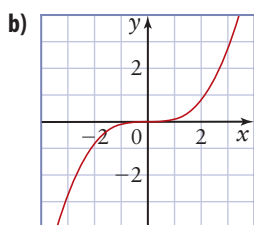
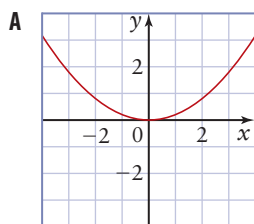
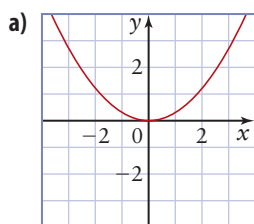
- C1** Discute des différences et des ressemblances entre la formule $m_{\tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ et la définition de la dérivée selon les principes de base.
- C2** Que représente la dérivée ? Que veut dire cet énoncé : La dérivée représente une nouvelle fonction ? Donne un exemple.
- C3** Quelle relation existe-t-il entre le domaine de la fonction initiale et le domaine de la fonction dérivée correspondante ? Donne un exemple.
- C4** Est-il vrai qu'une fonction peut être dérivable et non dérivable ? Explique ta réponse.

C5 Parmi les expressions suivantes, laquelle ou lesquelles ne représentent pas la dérivée de y par rapport à x pour la fonction $y = f(x)$? Explique ta réponse.

- A** $f'(x)$ **B** y' **C** $\frac{dx}{dy}$ **D** $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ **E** $\frac{dy}{dx}$

A À ton tour

1. Associe les graphiques a, b et c de $y = f(x)$ avec leur dérivée correspondante, à savoir les graphiques A, B et C. Explique tes choix.



2. **a)** Détermine la dérivée de $f(x) = x^3$.

b) Évalue chaque dérivée.

i) $f'(-6)$

ii) $f'(-0,5)$

iii) $f'\left(\frac{2}{3}\right)$

iv) $f'(2)$

c) Détermine l'équation de la tangente pour chaque valeur de x en b).

3. Explique ce qu'on veut dire par « la dérivée n'existe pas ». Donne des exemples.

4. **a)** Détermine la dérivée de $f(x) = x$.

b) Évalue chaque dérivée.

i) $f'(-6)$

ii) $f'(-0,5)$

iii) $f'\left(\frac{2}{3}\right)$

iv) $f'(2)$

5. Chaque dérivée ci-dessous a été déterminée par les principes de base à partir d'une fonction $f(x)$. Détermine cette fonction.

a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h}$

b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

c) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h}$

d) $f'(x) = -6 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

e) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h}{h} - \frac{x}{h}$

f) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

6. **a)** Détermine la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$.

b) Évalue chaque dérivée.

i) $f'(-6)$

ii) $f'(-0,5)$

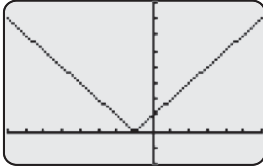
iii) $f'\left(\frac{2}{3}\right)$

iv) $f'(2)$

c) Détermine l'équation de la tangente pour chaque valeur de x en b).

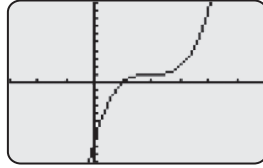
7. Indique le domaine à l'intérieur duquel chaque fonction est dérivable. Explique ton raisonnement.

a)



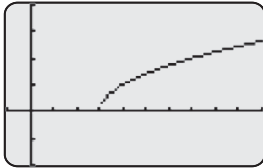
Paramètres d'affichage:
 $x \in [-8, 6]$, $y \in [-2, 8]$

b)



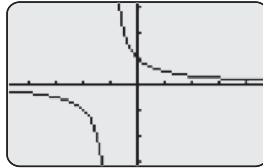
Paramètres d'affichage:
 $x \in [-3, 6]$, $y \in [-10, 10]$

c)



Paramètres d'affichage:
 $x \in [-1, 10]$, $y \in [-2, 4]$

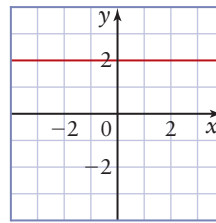
d)



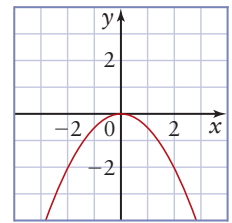
Paramètres d'affichage:
 $x \in [-4, 7]$, $y \in [-3, 1]$

8. Chaque graphique représente la dérivée d'une fonction $y = f(x)$. Indique si la fonction initiale est constante, affine, du second degré ou cubique. Comment le sais-tu?

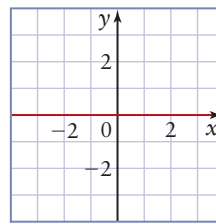
a)



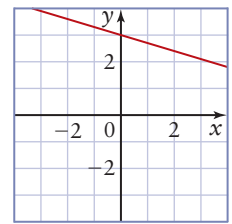
b)



c)



d)



B Liens et mise en application

9. a) Dérive $y = x^2$ par les principes de base.
b) Indique le domaine de la fonction initiale et de la fonction dérivée.
c) Quelle relation existe-t-il entre la fonction initiale et sa dérivée?
10. a) Détermine $\frac{dy}{dx}$ par les principes de base pour chaque fonction.
i) $y = -3x^2$ ii) $y = 4x^2$
b) Compare ces dérivées avec la dérivée de $y = x^2$ à la question 9. Quelle régularité remarques-tu?
c) Utilise la régularité en b) pour prédire la dérivée de chaque fonction.
i) $y = -2x^2$ ii) $y = 5x^2$
d) Vérifie tes prédictions à l'aide des principes de base.
11. a) Détermine la dérivée de la fonction constante $y = -4$ par les principes de base.
b) Obtiendras-tu le même résultat qu'en a) pour toute fonction constante? Explique ta réponse.
c) Détermine la dérivée de toute fonction constante $y = c$ par les principes de base.
12. a) Développe $(x + b)^3$.
b) Dérive chaque fonction à l'aide des principes de base et de ta réponse en a).
i) $y = 2x^3$ ii) $y = -x^3$
13. a) Compare les dérivées de la question 12 b) avec la dérivée de $y = x^3$ dans l'exemple 2. Quelle régularité remarques-tu?
b) Utilise cette régularité pour prédire la dérivée de chaque fonction.
i) $y = -4x^3$ ii) $y = \frac{1}{2}x^3$
c) Vérifie tes prédictions à l'aide des principes de base.

14. Détermine $\frac{dy}{dx}$ par les principes de base pour chaque fonction.

a) $y = 8x$ b) $y = 3x^2 - 2x$
 c) $y = 7 - x^2$ d) $y = x(4x + 5)$
 e) $y = (2x - 1)^2$

15. a) Développe $(x + b)^4$.

b) Dérive chaque fonction à l'aide des principes de base et de ta réponse en a).

i) $y = x^4$ ii) $y = 2x^4$ iii) $y = 3x^4$

c) Quelle régularité remarques-tu dans les dérivées ?

d) Prédis la dérivée de chaque fonction à l'aide de la régularité en c).

i) $y = -x^4$ ii) $y = \frac{1}{2}x^4$

e) Vérifie tes prédictions à l'aide des principes de base.

16. La hauteur d'un ballon de soccer botté est donnée par

$$H(t) = -4,9t^2 + 3,5t + 1,$$

où H représente la hauteur, en mètres, et t , le temps, en secondes.



a) Détermine le taux de variation de la hauteur du ballon en fonction du temps t .

b) Détermine le taux de variation de la hauteur du ballon à 0,5 s.

c) Quand le ballon s'arrête-t-il momentanément ? Quelle est la hauteur du ballon à ce moment précis ?

17. a) À l'aide des principes de base, détermine $\frac{dy}{dx}$ pour $y = x^2 - 2x$.

b) Esquisse le graphique de la fonction en a) et de sa dérivée.

c) Détermine l'équation de la tangente à la courbe en $x = -3$.

d) Esquisse la tangente sur le graphique de la fonction.

18. a) Dérive chaque fonction par les principes de base.

i) $y = \frac{2}{x}$

ii) $y = -\frac{1}{x}$

iii) $y = \frac{3}{x}$

iv) $y = -\frac{4}{3x}$

b) Quelle régularité remarques-tu dans les dérivées ?

c) Indique le domaine de chaque fonction initiale et de sa dérivée.

19. a) Utilise la régularité remarquée à la question 18 pour prédire la dérivée de chaque fonction.

i) $y = \frac{5}{x}$

ii) $y = -\frac{3}{5x}$

b) Vérifie tes prédictions à l'aide des principes de base.

20. Une fonction est définie pour $x \in \mathbb{R}$, mais elle n'est pas dérivable en $x = 2$.

a) Écris une équation possible pour cette fonction. Puis, trace son graphique.

b) Esquisse un graphique de la dérivée de la fonction pour vérifier qu'elle est non dérivable en $x = 2$.

c) Utilise les principes de base pour confirmer ta réponse en b) algébriquement.

21. **Problème du chapitre** Alicia a trouvé des données intéressantes sur le baby-boom causé au Canada par le retour au pays des soldats après la Seconde Guerre mondiale. Le tableau suivant indique le nombre annuel des naissances, de janvier 1950 à décembre 1967.

a) Saisis les données dans une calculatrice à affichage graphique pour créer un nuage de points. Suppose que 1950 est l'an 0.

Année	Nombre des naissances
1950	372 009
1951	381 092
1952	403 559
1953	417 884
1954	436 198
1955	442 937
1956	450 739
1957	469 093
1958	470 118
1959	479 275
1960	478 551
1961	475 700
1962	469 693
1963	465 767
1964	452 915
1965	418 595
1966	387 710
1967	370 894

Source: Statistique Canada, « Tableau B1-14: Naissances vivantes, taux brut de natalité, taux de fécondité par âge, taux brut de reproduction et pourcentage de naissances à l'hôpital, Canada, 1921 à 1974 » dans *Section B: Statistiques de l'état civil et santé* de R. D. Fraser, Queen's University, n° de produit 11-516-XIF au catalogue de Statistique Canada.

- b) Utilise la régression appropriée pour déterminer l'équation qui représente le mieux les données. Arrondis les valeurs à l'unité près.
- c) Dérive l'équation à l'aide des principes de base.

- d) Détermine le taux de variation instantané des naissances pour chacune des années suivantes:
- i) 1953 ii) 1957 iii) 1960
- iv) 1963 v) 1966
- e) Interprète les valeurs obtenues en d).
- f) À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, représente graphiquement l'équation initiale en c) et l'équation dérivée obtenue en d).
- g) **Réflexion** Quelle est l'utilité de connaître l'équation de la tangente pour toute année donnée?

✓ Question d'évaluation

22. a) Utilise les principes de base pour dériver $y = 2x^3 - 3x^2$.
- b) Trace le graphique de la fonction initiale et de sa dérivée.
- c) Détermine le taux de variation instantané de y quand $x = -4, -1, 0$ et 3 .
- d) Interprète les valeurs obtenues en c).
23. a) Prédis $\frac{dy}{dx}$ pour chaque fonction polynôme.
- i) $y = x^2 + 3x$
- ii) $y = x - 2x^3$
- iii) $y = 2x^4 - x + 5$
- b) Vérifie tes prédictions par les principes de base.

C Approfondissement et défis

24. a) Dérive chaque fonction par les principes de base.

i) $y = \frac{1}{x^2}$ ii) $y = \frac{1}{x^3}$ iii) $y = \frac{1}{x^4}$

- b) Indique le domaine de la fonction initiale et de la fonction dérivée.
- c) Quelle régularité remarques-tu dans les dérivées en a)? Pourquoi cette régularité a-t-elle du sens?

25. **Technologie** a) À l'aide d'une calculatrice à affichage, représente graphiquement la fonction $y = 3|x - 2| + 1$. Où cette fonction est-elle non dérivable?

- b) Confirme ta réponse en a) par les principes de base.

Conseil techno

Pour entrer une valeur absolue, appuie sur **MATH** puis sur ► pour sélectionner **NUM**. Sélectionne **1:abs(** et appuie sur **ENTER**.

26. a) Utilise les résultats de la rubrique **Explore** et des exemples de cette section pour déterminer la dérivée de chaque fonction.
- i) $y = 1$ ii) $y = x$ iii) $y = x^2$
 iv) $y = x^3$ v) $y = x^4$
- b) Décris la régularité des dérivées en a).
 c) Prédis la dérivée de chaque fonction.
 i) $y = x^5$ ii) $y = x^6$
- d) Vérifie la justesse de tes prédictions à l'aide des principes de base.
 e) Écris une règle générale qui permet de déterminer la dérivée de $y = x^n$, où n est un nombre entier positif.
 f) Applique la règle créée en e) à quelques fonctions polynômes de ton choix. Vérifie tes résultats par les principes de base.
27. a) Pour déterminer la dérivée par les principes de base en $x = a$, on peut aussi écrire $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. À l'aide de cette expression, détermine la dérivée de $y = x^2$. Que dois-tu faire au numérateur pour réduire l'expression et déterminer la limite?
- b) Utilise la définition en a) pour déterminer la dérivée de chaque fonction en $x = 2$.
 i) $y = x^3$ ii) $y = x^4$ iii) $y = x^5$
- c) Quels avantages cette seconde définition de la dérivée présente-t-elle? Explique ta réponse.
28. Détermine la dérivée de chaque fonction par les principes de base.
- a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{3x-1}{x+4}$
29. Dérive chaque fonction. Indique le domaine de la fonction initiale et de la fonction dérivée.
 a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$
30. a) **Technologie** À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, représente graphiquement la fonction $y = x^{\frac{2}{3}}$. Où la fonction est-elle non dérivable? Explique ta réponse.
 b) Confirme ta réponse en a) par les principes de base.
31. **Concours de maths** Si les termes 2^a , 3^b et 4^c forment une suite arithmétique, détermine tous les triplets (a, b, c) possibles, où a , b et c sont des nombres entiers positifs.
32. **Concours de maths** Les côtés d'un triangle mesurent 1 cm, 2 cm et $\sqrt{3}$ cm. Les côtés d'un autre triangle, qui a la même aire, mesurent x , x et x . Détermine la valeur de x .
33. **Concours de maths** Détermine la valeur de l'expression $\frac{x^{12} + 3x^{11} + 2x^{10}}{x^{11} + 2x^{10}}$ quand $x = 2008$.

LES MATHS AU TRAVAIL

Tanica a obtenu son baccalauréat ès sciences après quatre ans d'études en génie chimique à l'Université Queen. Elle travaille pour une entreprise qui conçoit et fabrique des produits de nettoyage écologiques. Avec ses collègues, Tanica crée des produits écologiques, les vérifie et évalue leurs effets sur l'environnement. À chacune de ces étapes, Tanica surveille les taux de variation de nombreuses réactions chimiques. Elle analyse ensuite ces données afin d'obtenir un produit final.



1. Tu peux utiliser un logiciel de calcul formel pour déterminer les dérivées. Voici comment faire. Soit la fonction $y = x^3$.

- Allume la calculatrice. Au besoin, appuie sur la touche **HOME** pour afficher l'écran d'accueil.
- Efface les variables mémorisées en appuyant sur **2ND**, puis sur **F1** pour accéder au menu **F6 Nettoyage**. Choisis **2:NouvProb** et appuie sur **ENTER**. Tu devrais toujours suivre ces instructions chaque fois que tu utilises le logiciel de calcul formel.
- À partir du menu **F4**, sélectionne **1:Définir**.

- Entre $f(x) = x^3$, et appuie sur **ENTER**.

- À partir du menu **F3**, sélectionne **1:d(dérivée**.

- Entre $f(x)$, x . Appuie sur **STO►**.
Entre $g(x)$. Appuie sur **ENTER**.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Outils	At3	Calc	Autre	ESPr3m	Nettoyage
■ NouvProb					Fait
■ Définir f(x)=x ³					Fait
■ d/dx(f(x)) → g(x)					Fait
■ g(x)					3·x ²
g(x)					
MAIN	DEG AUTO	FONC			4/30

Le logiciel de calcul formel déterminera la dérivée de $f(x)$ et la mémorisera dans $g(x)$. Pour voir le résultat, entre $g(x)$, puis appuie sur **ENTER**.

2. Tu peux évaluer la fonction et sa dérivée pour n'importe quelle valeur de x .
 - Entre $f(2)$, et appuie sur **ENTER**.
 - Entre $g(2)$, et appuie sur **ENTER**.
3. Tu peux utiliser le logiciel de calcul formel pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x)$ en $x = 2$.

- Utilise les valeurs de l'étape 2 pour compléter $y = mx + b$.

Dans cet exemple simple, tu pourrais déterminer la valeur de b par inspection. Cependant, utilise plutôt le logiciel de calcul formel.

- À partir du menu **F2**, sélectionne **1:résol**.

- Entre $8 = 24 + b$, b . Appuie sur **ENTER**.

L'équation de la tangente en $x = 2$ est $y = 12x - 16$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Outils	At3	Calc	Autre	ESPr3m	Nettoyage
■ g(x)					3·x ²
■ f(2)					8
■ g(2)					12
■ 8 = 12·2 + b					8 = b + 24
■ résol(8 = 24 + b, b)					b = -16
■ résol(8=24+b, b)					
MAIN	DEG AUTO	FONC			8/30

Problèmes

1. a) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, détermine l'équation de la tangente à la courbe de $y = x^4$ en $x = -1$.
b) Vérifie algébriquement ta réponse en a) avec un papier et un crayon.
c) Représente la fonction et la tangente en a) dans un même plan cartésien.
2. a) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, détermine l'équation de la tangente à la courbe de $y = x^3 + x$ en $x = 1$.
b) Représente la fonction et la tangente en a) dans un même plan cartésien.

Matériel

- calculatrice dotée du logiciel de calcul formel

Conseil techno

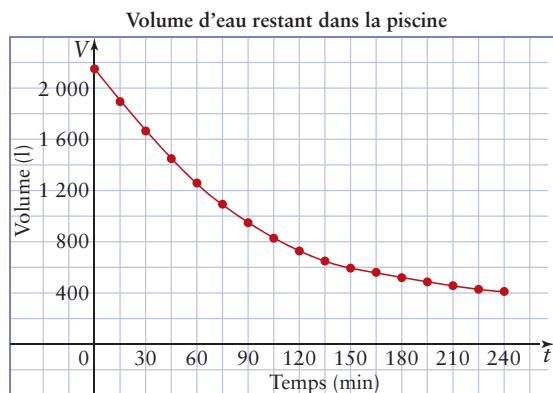
Lorsque tu utilises la fonction **résol** d'un logiciel de calcul formel, tu dois indiquer la variable dont tu veux connaître la valeur. Puisqu'un logiciel de calcul formel sait traiter les symboles algébriques, il peut aussi résoudre des équations composées de symboles. Par exemple, pour déterminer la valeur de b dans $y = mx + b$, à l'aide du logiciel de calcul formel :

- sélectionne **1:résol** (à partir du menu **F2** ;
- saisis $y = m \times x + b$, b), et appuie sur **ENTER**.

Tu peux constater que le logiciel de calcul formel a traité algébriquement l'équation pour déterminer la valeur de b .

1.1 Les taux de variation et la pente d'une courbe

1. Ce graphique montre la quantité d'eau qui reste dans une piscine qui se vide depuis 4 heures.



- a) Qu'indique le graphique au sujet de la vitesse à laquelle l'eau s'écoule? Explique ta réponse.
 - b) Détermine le taux de variation moyen du volume d'eau restant sur les intervalles ci-dessous.
 - i) au cours de la première heure
 - ii) au cours de la dernière heure
 - c) Détermine le taux de variation instantané du volume d'eau restant dans la piscine après:
 - i) 30 min
 - ii) 1,5 h
 - iii) 3 h
 - d) Quelles modifications le graphique subirait-il sous les conditions suivantes? Explique ta réponse.
 - i) L'eau s'écoule plus rapidement.
 - ii) La piscine contenait plus d'eau au départ.
 - e) Dessine un graphique qui représente le taux de variation instantané du volume d'eau restant par rapport au temps dans le graphique montré.
2. Décris une situation réelle qui illustre chaque taux de variation. Explique ta réponse.
 - a) un taux de variation moyen négatif
 - b) un taux de variation moyen positif
 - c) un taux de variation instantané positif
 - d) un taux de variation instantané négatif

1.2 Déterminer le taux de variation à l'aide d'une équation

3. Lors d'un feu d'artifice, on lance une fusée à partir d'une plate-forme de 10 m de hauteur. La fonction $h(t) = -4,9t^2 + 35t + 10$ modélise la hauteur h de la fusée au-dessus du sol, en mètres, au temps t , en secondes.
 - a) Détermine le taux de variation moyen de la hauteur de la fusée de la deuxième à la quatrième seconde.
 - b) Estime le taux de variation instantané de la hauteur de la fusée à 5 s et interprète-le.
 - c) Comment peux-tu mieux estimer le taux de variation instantané?
4. a) Soit la fonction $y = 3x^2 + 2x$. À l'aide d'une expression algébrique simplifiée formulée en fonction de a et h , estime la pente de la tangente pour chacune des valeurs de a ci-dessous, si $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = 0,001$.
 - i) $a = 2$
 - ii) $a = -3$
- b) Détermine l'équation de la tangente qui correspond à chaque valeur de a ci-dessus.
- c) Trace la courbe et les tangentes.

1.3 Les limites

5. $t_n = \frac{5 - n^2}{3n}$, $n \in \mathbb{N}$ représente le terme général d'une suite.
 - a) Écris les cinq premiers termes de cette suite.
 - b) Cette suite admet-elle une limite quand $n \rightarrow \infty$? Explique ta réponse.
6. On laisse tomber une balle rebondissante depuis une hauteur de 5 m. À chaque rebond, elle revient aux $\frac{7}{8}$ de la hauteur de sa chute.
 - a) Détermine les cinq premiers termes de la suite infinie qui représente la distance parcourue par la balle vers le haut.
 - b) Quelle est la limite des distances lorsque le nombre de rebonds tend vers l'infini?
 - c) Combien de rebonds sont nécessaires avant que le rebond soit inférieur à 1 m?

7. a) Détermine si la fonction $g(x) = \frac{x-5}{x+3}$ est

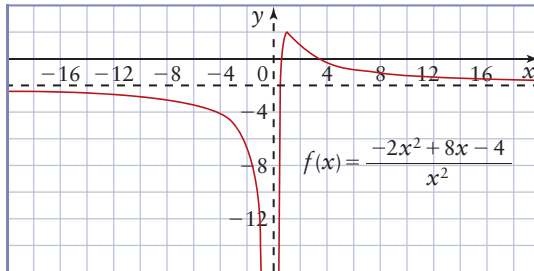
continue en $x = 3$. Explique ta réponse à l'aide d'une table de valeurs.

- b) La fonction en a) est-elle discontinue pour une valeur quelconque de x ? Explique ta réponse.

1.4 Les limites et la continuité

8. Examine le graphique suivant.

- a) Indique le domaine et l'image de cette fonction.



- b) Évalue chacune des limites ci-dessous pour cette fonction.

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 8x - 4}{x^2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 8x - 4}{x^2}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 8x - 4}{x^2}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x^2 + 8x - 4}{x^2}$

- c) La fonction est-elle continue? Si elle ne l'est pas, indique où se trouve la discontinuité. Explique ta réponse.

9. Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(-1+x)^2 - 4}{x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 8x}{2x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x - 8}$

e) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$

10. Que peux-tu affirmer au sujet du graphique de la fonction $y = h(x)$ si $\lim_{x \rightarrow -6^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -6^+} h(x) = 3$, mais que $h(-6) \neq 3$?

1.5 Une introduction aux dérivées

11. Détermine la dérivée de chaque fonction par les principes de base.

a) $y = 4x - 1$

c) $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2$

b) $h(x) = 11x^2 + 2x$

d) $f(x) = (x+3)(x-1)$

12. a) Détermine $\frac{dy}{dx}$ par les principes de base pour $y = 3x^2 - 4x$.

- b) Esquisse le graphique de la fonction en a) et de sa dérivée.

- c) Détermine l'équation de la tangente au graphique de la fonction en $x = -2$.

chapitre - LA CONCLUSION

Dans ce chapitre, tu as examiné des problèmes qu'une ou un climatologue ou une ou un démographe pourrait étudier.

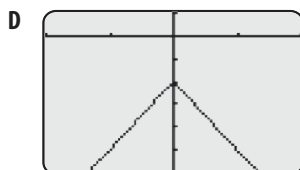
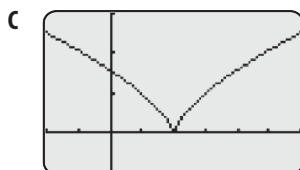
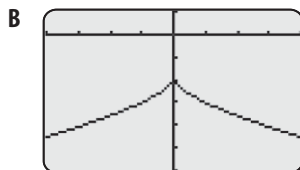
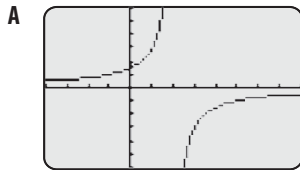
- a) Effectue une recherche pour trouver des données sur un sujet qu'une ou un climatologue ou une ou un démographe pourrait vouloir étudier. Par exemple, une ou un climatologue peut choisir de mener une étude sur les températures moyennes ou les précipitations dans une ville donnée, tandis qu'une ou un démographe

pourrait souhaiter étudier l'évolution de la population canadienne selon les groupes d'âge, ou les populations de différents pays.

- b) Montre la façon dont on peut utiliser le taux de variation moyen et le taux de variation instantané pour analyser les données recueillies en a), en créant des questions qui comportent des limites, des pentes et des dérivées. Assure-toi d'inclure une solution pour chacune de tes questions.

TEST PRÉPARATOIRE du chapitre 1

1. Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle est définie en $x = 2$, mais n'est pas dérivable en ce même point ? Explique ton choix.



2. Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle n'indique pas la valeur exacte du taux de variation instantané en $x = a$? Explique ton choix.

A $f'(a)$ B $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 C $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ D $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

3. Évalue chaque limite, si elle existe.

a) $\lim_{x \rightarrow 9} (4x - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} (2x^4 - 3x^2 + 6)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{2x^2 - 5x}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{2 + x^2}$

4. Parmi les énoncés suivants au sujet des limites, indique celui qui est faux. Explique ta réponse.

- A Une limite peut servir à déterminer le comportement à l'infini d'un graphique.
 B Une limite peut servir à déterminer le comportement d'un graphique d'un côté ou de l'autre d'une asymptote verticale.
 C Une limite peut servir à déterminer le taux de variation moyen entre deux points d'un graphique.
 D Une limite peut servir à déterminer si une fonction est discontinue ou non.

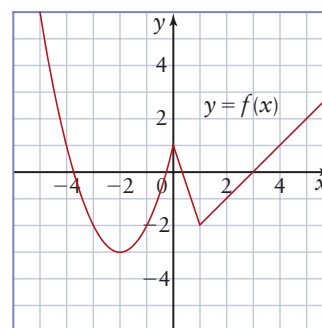
5. a) Détermine $\frac{dy}{dx}$ par les principes de base pour $y = x^3 - 4x^2$.

- b) **Technologie** À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, représente graphiquement la fonction en a) et sa dérivée.

- c) Détermine l'équation de la tangente à la courbe en $x = -1$.

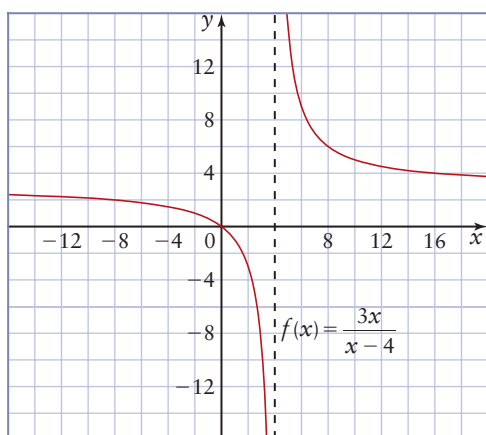
- d) Ajoute la tangente au graphique de la fonction.

6. À partir du graphique suivant, détermine les limites indiquées.



a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 e) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

7. Examine ce graphique, puis réponds aux questions.



- a) Indique le domaine et l'image de la fonction.
b) Évalue chaque limite pour le graphique.

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x-4}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x-4}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x}{x-4}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x}{x-4}$

v) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3x}{x-4}$

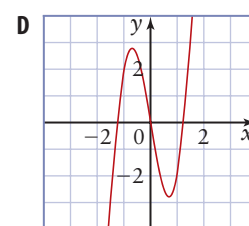
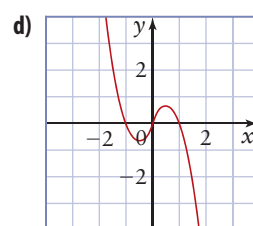
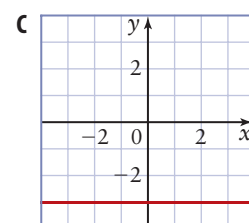
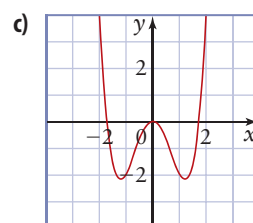
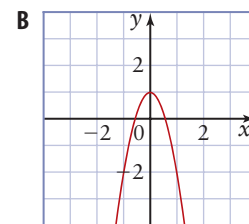
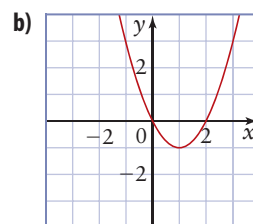
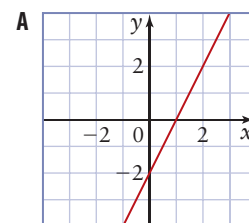
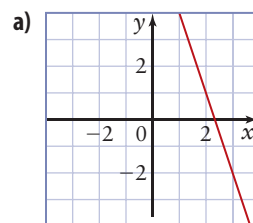
vi) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x-4}$

- c) La fonction est-elle continue? Si elle ne l'est pas, indique où se trouve la discontinuité. Explique ta réponse.
8. Un menuisier construit un grand hangar de forme cubique. Le volume du hangar se traduit par $V(x) = x^2 \left(\frac{16 - x^2}{4x} \right)$, où x représente la longueur des côtés, en mètres.
- a) Simplifie l'expression qui représente le volume du hangar.
- b) Détermine le taux de variation moyen du volume du hangar quand la longueur des côtés se situe entre 1,5 m et 3 m.
- c) Détermine le taux de variation instantané du volume du hangar pour des côtés de 3 m.

9. Une pierre lancée dans un étang crée une onde circulaire à la surface. Le rayon de l'onde augmente à un taux de 0,2 m/s.

- a) Détermine le rayon de l'onde après:
- i) 1 s ii) 3 s iii) 5 s
- b) Écris une expression qui représente le taux de variation instantané de l'aire de l'onde en fonction du rayon.
- c) Détermine le taux de variation instantané de l'aire de l'onde pour chacun des rayons en a).

10. Associe les fonctions a, b, c et d aux fonctions dérivées A, B, C et D correspondantes.



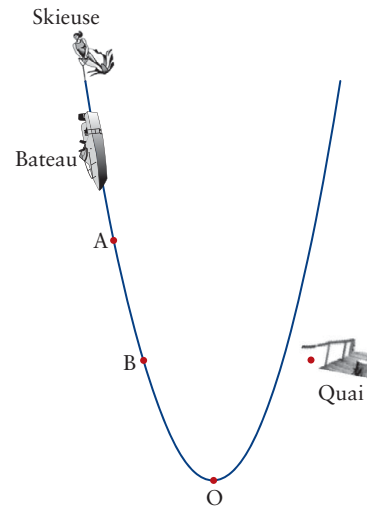
ACTIVITÉ

Les joies du ski nautique : Où est le quai ?

Le ski nautique est une activité estivale populaire partout au Canada. Les skieuses et les skieurs tiennent une corde et se font tirer sur l'eau par un bateau à moteur.

Linda décide de faire du ski nautique par un après-midi ensoleillé. Après avoir skié pendant 15 minutes, elle signale au conducteur du bateau de la ramener au quai. Le conducteur dirige le bateau vers le quai, et à son approche, il effectue un virage parabolique. Si Linda lâche la corde au bon moment, elle glissera sur l'eau et arrêtera près du quai.

Suppose que le sommet de la parabole que parcourt le bateau correspond à l'origine. Le quai est situé à 30 m à l'est et à 30 m au nord de l'origine. Le bateau entreprend son approche à 30 m à l'ouest et 60 m au nord de l'origine.



- Si Linda lâche la corde lorsqu'elle atteint le point A, vers quel endroit se dirige-t-elle par rapport au quai ? Décris sa trajectoire à l'aide d'une équation.
(Indice : Elle parcourra une ligne droite.)
- Si Linda lâche la corde lorsqu'elle atteint le point B, vers quel endroit se dirige-t-elle par rapport au quai ?
- Si Linda attend d'atteindre le point O, jusqu'à quel point passera-t-elle près du quai ?
- À quel endroit (point) Linda doit-elle lâcher la corde pour se diriger droit vers le quai ?
- Quelles suppositions as-tu faites ?
- Afin de rendre cette situation plus réaliste, de quels autres renseignements as-tu besoin ? Crée ces données et utilise-les pour répondre à la question en d).

Tout au long de cette activité, assure-toi d'expliquer ton raisonnement et utilise des schémas pour appuyer tes réponses.

CHAPITRE 1 LES TAUX DE VARIATION

Connaissances préalables, pages 2 et 3

1. Les premières différences: $-4, -2, 0, 2, 4, 6$ a) Les réponses varieront: Les premières différences ne sont pas égales, mais elles augmentent d'un montant égal. b) Les réponses varieront: Puisque les premières différences ne sont pas égales, la fonction n'est pas affine.

2. a) $-\frac{1}{3}$ b) -2 c) $\frac{1}{5}$ d) 0

3. a) $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$; pente: $\frac{1}{2}$; ordonnée à l'origine: $-\frac{7}{4}$

b) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$; pente: $-\frac{5}{3}$; ordonnée à l'origine: $\frac{1}{3}$

c) $y = -2x - \frac{10}{9}$; pente: -2 ; ordonnée à l'origine: $-\frac{10}{9}$

d) $y = \frac{7}{5}x + \frac{2}{5}$; pente: $\frac{7}{5}$; ordonnée à l'origine: $\frac{2}{5}$

4. a) $y = 5x + 3$ b) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ c) $y = -2x + 15$

d) $y = x - 3$ 5. a) $a^2 + 2ab + b^2$ b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ d) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

e) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

f) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

6. a) $(2x-1)(x+1)$ b) $(3x+1)(2x+5)$

c) $(x-1)(x^2+x+1)$ d) $x^2(2x+1)(x+3)$

e) non factorisable f) $t(t+3)(t-1)$ 7. a) $(a-b)(a+b)$

b) $a^3 - b^3$ c) $(a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

d) $(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

e) $h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1})$

8. a) $x-2$ b) 1 c) 2 d) $3h$ 9. a) $-\frac{h}{2(2+h)}$ b) $-\frac{h}{x(x+h)}$

c) $-\frac{h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$ d) $-\frac{1}{x(x+h)}$ 10. a) $(-2, 6)$ et $(3, 21)$

b) $(-2, -23)$ et $(3, -38)$ c) $(-2, -41)$ et $(3, -6)$

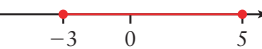
11. a) $16 + 6h$ b) $42 + 23h + 3h^2$ c) $-9 + 12h + 11h^2 + 2h^3$

12. a) 6 b) $24 + 12h + 2h^2$ c) $-\frac{1}{2(2+h)}$ d) $\frac{4}{2(2+h)}$

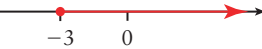
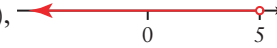
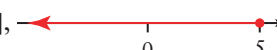
13. a) $\{x \in \mathbb{R}\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 8\}$ c) $\{x \in \mathbb{R}\}$

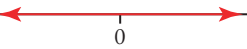
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3, 2\}$

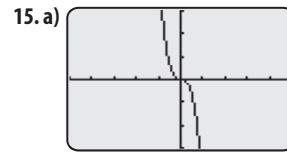
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 9\}$

14. R1: $-3 < x < 5$,  R2: $[-3, 5]$,  R3: $[-3, 5]$

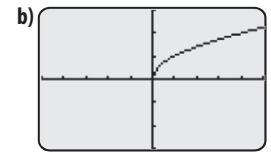
R4: $-3 < x \leq 5$,  R5: $(-3, \infty)$, $x > -3$

R6: $x \geq -3$,  R7: $(-\infty, 5)$,  R8: $(-\infty, 5]$, 

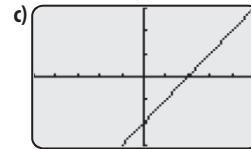
R9: 



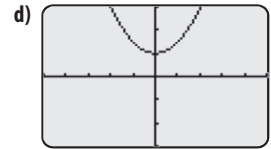
domaine: $\{x \in \mathbb{R}\}$
image: $\{y \in \mathbb{R}\}$



domaine: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
image: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$



domaine:
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2,\}$
image: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -4\}$



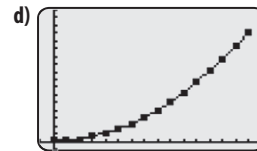
domaine: $\{x \in \mathbb{R}\}$
image: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

1.1 Les taux de variation et la pente d'une courbe, pages 9 à 12

1. a) $\frac{7}{6}$ b) $-\frac{237}{82}$ c) $-\frac{93}{130}$ 2. i) -2 ii) 0 iii) 8 iv) $\frac{11}{6}$

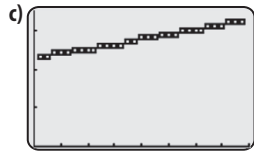
3. a) 2 b) 1 c) $\frac{7}{4}$ 4. Les réponses varieront: a) i) Tous

égaux à 0. B et F: points minimums locaux; D: point maximum local. ii) Égaux, mais de signes opposés; négatif en A, positif en G. iii) Positif aux points C et G, puisque la fonction est croissante. iv) Négatifs puisque la fonction est décroissante. b) i) Négatif en B; positif en C. ii) Négatifs puisque la fonction est décroissante. iii) Positifs puisque la fonction est croissante. iv) Négatif en A; positif en C. 5. a) Variable indépendante: temps (s); variable dépendante: l'aire totale (cm²); unités: cm²/s; b) i) 31,4 cm²/s ii) 157 cm²/s iii) 169,57 cm²/s c) i) 13 cm²/s ii) 88 cm²/s iii) 176 cm²/s



Les réponses varieront: i) 38 cm²/s ii) 100 cm²/s iii) 163 cm²/s e) Les réponses varieront: Le taux de variation instantané augmente rapidement à mesure que le temps augmente. 6. C 7. a) i) Premières différences: 38, 14, 2, 2, 14; taux de variation moyen: 38, 14, 2, 2, 14 ii) Premières différences: 52, -4, -12, 28, 116; taux de variation moyen: 26, -2, -6, 14, 58 b) Les réponses varieront: Le taux de variation moyen est égal aux premières différences en i), et à la moitié de la valeur en ii). c) Les réponses varieront. d) Les réponses varieront: Les premières différences et le taux de variation moyen d'une fonction sont égaux si la différence entre les valeurs de x successives est toujours égale à un. 8. Les explications varieront. a) Instantané

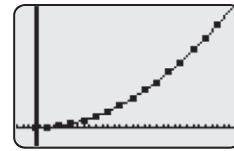
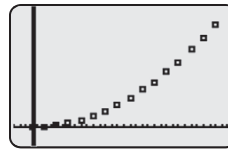
b) Moyen c) Instantané d) Moyen e) Moyen 9. Les réponses varieront: a) Température initiale de l'eau: 10 °C. L'eau a atteint le point d'ébullition 3 min plus tard. b) Le graphique montre que l'augmentation de la température de l'eau se fait rapidement dans les 40 premières secondes, puis plus lentement jusqu'à ce que la température atteigne le point d'ébullition à $t = 180$ s. Après 180 s, le graphique prendrait la forme d'une droite et le taux de variation instantané serait de zéro. 10. a) i) 305 210 ii) 318 146 iii) De 1975 à 1985: 269 954; de 1985 à 1995: 345 936; de 1995 à 2005: 299 741. b)–c) Les réponses varieront. b) La croissance de la population a été continue, mais le taux de croissance a varié. 245 105; 316 135; 308 434



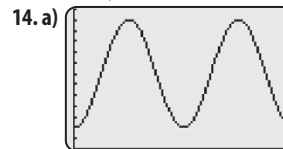
c) Les réponses varieront: Le taux de variation de la population canadienne a augmenté de façon constante depuis 1975. d) La population canadienne augmente en fonction du temps. e) Les réponses varieront: Quel taux de variation moyen prévois-tu pour la population canadienne en 2015? Explique ta réponse. Le taux de variation moyen annuel de 1975 à 2005 était de 305 210 personnes, donc la population estimée en 2015 est de 35 383 946. Quel taux de variation instantané prévois-tu pour la population canadienne en 2015? Explique ta réponse. La prédiction suppose un changement égal au taux de variation moyen des 30 dernières années. Donc, le taux de variation instantané estimé sera le même. 12. a) Les réponses varieront: Dans le graphique présenté, la résistance augmente à mesure que la tension augmente. b) 113 V/A

13. a)

Temps (min)	Rayon (m)	Aire (m ²)
0	0	0
2	4	50,3
4	8	201,1
6	12	452,4
8	16	804,2
10	20	1 256,6
12	24	1 809,6
14	28	2 463,0
16	32	3 217,0
18	36	4 071,5
20	40	5 026,5
22	44	6 082,1
24	48	7 238,2
26	52	8 494,9
28	56	9 852,0
30	60	11 309,7

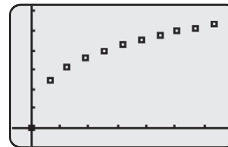


b) i) 50,3 m²/min ii) 226,2 m²/min iii) 377,0 m²/min c) Les réponses varieront: Le taux de variation moyen sur les intervalles dont les points milieux correspondent respectivement à $t = 5$ et $t = 25$ fournit la meilleure estimation. Le taux estimé est de 125,7 m²/min en $t = 5$, et de 628,4 m²/min en $t = 25$. d) Les réponses varieront.



graphique de
 $y = -5 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 7$
 (en mode radian)

b) Le taux de variation de la hauteur de la coccinelle n'est pas constant puisqu'il dépend de la position de la pale. c) Oui 15. a–b) Les réponses varieront. 16. a) i) 1,19 cm/s; 0,20 cm/s ii) 0,41 cm/s; 0,20 cm/s b) i) La pente des sécantes de (0, 0) à (3, 3,58) et de (7, 4,75) à (10, 5,35) ii) La pente des sécantes de (2, 3,13) à (4, 3,94) et de (8, 4,96) à (10, 5,35) c) Si la tasse était cylindrique, le graphique serait une droite.



d) Volumes: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 cm³. L'eau est versée à un taux constant. 17. $\frac{2}{3}$
 18. $\log_9(\log_9 25)^2$

1.2 Déterminer un taux de variation à l'aide d'une équation, pages 20 à 23

1. a) 1 b) 5 c) 21 d) 0 2. a) 1 b) 4 c) 12 d) 0

$$3. \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \quad 4. \frac{(-3+h)^2 - (-3)^2}{h} \quad 5. \frac{(5+h)^3 - (5)^3}{h} \\ 6. \frac{(-1+h)^3 - (-1)^3}{h}$$

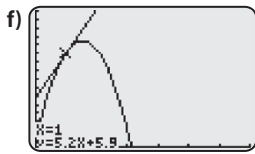
7. a) Vrai b) Faux; le point de tangence correspond à $x = 1$. c) Vrai; on peut aussi obtenir cette expression par simplification. d) Vrai; l'expression n'est pas définie pour $h = 0$. 8. a) $-5,9, -5,99, -5,999$ b) $-5,9, -5,99, -5,999$ c) Les réponses ne varieront pas: les réponses en a) et b) sont les mêmes. Elles sont vraisemblables, car l'expression utilisée en b) est la forme simplifiée de l'expression utilisée en a). À mesure que l'intervalle h diminue, la valeur de l'expression tend vers -6 .

9. 256 10. a) 2 b) 2 c) 6 d) -13 11. a) 7 b) 2 c) -4 d) -23 12. a) i) $4a + 2b$; $-11,98$ ii) $3a^2 + 3ab + b^2$; $26,910$ 1 iii) $4a^3 + 6a^2b + 4ab^2 + b^3$; $-107,461$ 199 b) Les réponses varieront: i)–iii) La réponse représente une estimation de la pente de la tangente à la courbe de la fonction au point où $x = -3$.

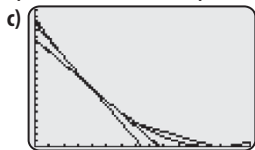
13. a) i) $f(x) = x^2$ ii) $a = 4$ iii) $b = 0,01$
 iv) $(a, f(a)) = (4, 16)$ b) i) $f(x) = x^3$ ii) $a = 6$
 iii) $b = 0,0001$ iv) $(a, f(a)) = (6, 216)$ b) i) $f(x) = x^3$
 ii) $a = 6$ iii) $b = 0,001$ iv) $(a, f(a)) = (6, 216)$ c) i) $f(x) = 3x^4$
 ii) $a = -1$ iii) $b = 0,1$ iv) $(a, f(a)) = (-1, 3)$ d) i) $f(x) = -2x$
 ii) $a = 8$ iii) $b = 0,1$ iv) $(a, f(a)) = (8, -16)$

14. a)
$$\frac{-4,9(1+h)^2 + 15(1+h) + 1 - (-4,9(1)^2 + 15(1) + 1)}{h}$$

b) Les réponses varieront: L'expression n'est pas valable pour $h = 0$. La division par zéro n'est pas définie dans le système des nombres réels. c) i) 4,71 ii) 5,151 iii) 5,195 1 iv) 5,199 51 d) Les réponses varieront: Le taux de variation instantané de la hauteur du ballon après 1 s est de 5,2 m/s. e) Les réponses varieront: Au point où $t = 1$ s, le ballon se déplace vers le haut à une vitesse de 5,2 m/s.



15. a) -2 400 l/min et -600 l/min b) i) -2 400 l/min ii) -1 800 l/min iii) -1 200 l/min iv) -600 l/min



16. a) Aire totale: $-565,5 \text{ cm}^2/\text{cm}$; volume: $-6 387,9 \text{ cm}^3/\text{cm}$ b) Aire totale: $-251,3 \text{ cm}^2/\text{cm}$; volume: $-1 256,6 \text{ cm}^3/\text{cm}$ c) Les réponses varieront.

17. a) -15 m/s b)
$$\frac{80 - 5(a+h)^2 - (80 - 5(a)^2)}{h} = 10a - 5h$$

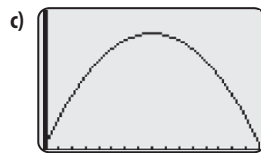
- i) -5,005 m/s ii) -10,005 m/s
 iii) -15,005 m/s iv) -20,005 m/s v) -25,005 m/s
 vi) -30,005 m/s c) Les réponses varieront: Les valeurs obtenues en b) représentent le taux de variation de la hauteur de la branche au-dessus du sol à différents moments durant sa chute.

18. a)

Point de tangence (a, f(a))	Valeurs de h	Second point (a + h, f(a + h))	Pente de la sécante $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
(4, -4)	1	(5, -10)	-6
(4, -4)	0,1	(4,1, -4,51)	-5,1
(4, -4)	0,01	(4,01, -4,050 1)	-5,01
(4, -4)	0,001	(4,001, -4,005 001)	-5,001
(4, -4)	0,000 1	(4,000 1, -4,000 500 01)	-5,000 1

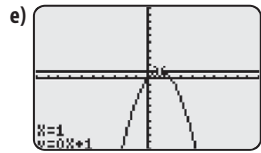
- b) Les réponses varieront: Les valeurs de la dernière colonne indiquent que la pente de la tangente à la courbe de $f(x) = 3x - x^2$ en $x = 4$ est -5. 19. a) 0 \$/année
 b) i) $t = 2$: 11,9, 11,99, 11,999; 12 \$/année ii) $t = 5$: 5,9, 5,99, 5,999; 6 \$/année iii) $t = 10$: -4,1, -4,01, -4,001; -4 \$/année iv) $t = 13$: -10,1, -10,01, -10,001; -10 \$/année

- v) $t = 15$: -14,1, -14,01, -14,001; -14 \$/année



20. a)
$$\frac{2x - x^2 - 1}{x - 1}$$
 b) $x = 1,1, -0,1, x = 1,01, 0,01;$

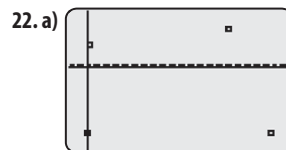
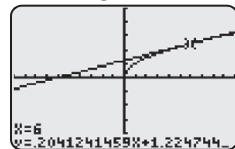
- $x = 1,001, -0,001; x = 0,9, 0,1; x = 0,99, 0,01;$
 $x = 0,999, 0,001$ c) 0 d) $y = 1$



21. a) $x = 5,9$: 0,204 98; $x = 5,99$: 0,204 21; $x = 5,999$: 0,204 13; $x = 6,1$: 0,203 28; $x = 6,01$: 0,204 03; $x = 6,001$: 0,204 12; $x = 6$: 0,2

(arrondi à une décimale près)

- b) La tangente à la courbe de $y = \sqrt{x}$ en $x = 6$

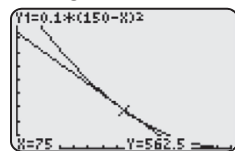


- b) Les réponses varieront: le taux de variation moyen n'est pas constant tout au long du graphique.

- c) 0 °C/min d) Avec la régression du second degré: $y = -0,012 7x^2 + 1,383x - 8,098$

e)
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-0,254ah - 0,0127h^2 + 1,383h}{h} = -0,254a + 1,383 - 0,0127h$$

- f) Pour déterminer les taux de variation instantanés, reporte $h = 0$ dans l'expression ci-dessus:
 i) 1,332 2 °C/min ii) 0,621 °C/min iii) -0,522 °C/min
 iv) -1,284 °C/min g) Les réponses varieront: Les valeurs en f) représentent mieux l'effet du chinook. Le taux de variation moyen sur l'intervalle entier est de 0 °C/min. Les taux de variation en f) donnent une approximation des taux de variation instantanés et montrent l'augmentation et la diminution rapides de la température. 23. a) -24 l/min et -3 l/min b) -15 l/min
 c) La courbe de $V(t) = 0,1(150-t)^2$, où $0 \leq t \leq 150$ et la tangente en $x = 75$ min



24. a) i) $-\frac{1}{7}$ ii) $-\frac{1}{6}$ iii) Les réponses varieront. b) i) $\frac{4}{7}$ ii) $\frac{2}{3}$
 iii) Les réponses varieront. c) i) $\frac{1}{7}$ ii) $\frac{1}{6}$ iii) Les réponses
 varieront. d) i) $\frac{\sqrt{11}-2}{7}$ ii) $\frac{1}{4}$ iii) Les réponses varieront.

25. a) i) $-\frac{1}{20}$ ii) $-\frac{2}{49}$ iii) Les réponses varieront. b) i) $\frac{1}{40}$

ii) $\frac{1}{49}$ iii) Les réponses varieront. c) i) $-\frac{1}{40}$ ii) $-\frac{1}{49}$

iii) Les réponses varieront. d) i) $-\frac{5}{54}$ ii) $-\frac{5}{64}$

iii) Les réponses varieront. 26. a) i) $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

iii) Les réponses varieront. b) i) $\frac{3(1-\sqrt{3})}{\pi}$ ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

iii) Les réponses varieront. c) i) $\frac{4\sqrt{3}}{\pi}$ ii) 2 iii) Les réponses

varieront. 27. a) 0 b) -c) Les réponses varieront. d) 0

e) Les réponses varieront. 28. a) m b) -c) Les réponses

varieront. d) m e) Les réponses varieront.

29. $x + 80y + 2\,562 = 0$ 30. $x = \frac{3}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}$

31. $\log_{\sqrt{3}}(a+b) = 5$

1.3 Les limites, pages 29 à 32

1. a) La limite n'existe pas. Les réponses varieront :

La suite est divergente. b) 6 c) 0 d) 3 e) -3 2. a) 4

b) N'existe pas. Les réponses varieront : La suite est

divergente. c) 3 3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas. 4. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$

5. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 6. Les réponses varieront : a) Faux :

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$ b) Faux : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$. La fonction est

discontinue, mais les limites à droite et à gauche sont

égales, la limite existe donc. c) Vrai : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$

d) Faux : $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ e) Faux : $f(3) = -1$ 7. a) La

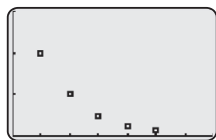
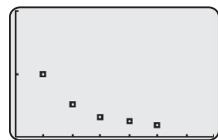
fonction $h(x)$ est continue en $x = -1$ b) La fonction n'est
 pas continue en $x = -1$, car $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ n'existe pas.

8. a) $t_1 = \frac{2}{3}$; $t_2 = \frac{2}{9}$; $t_3 = \frac{2}{27}$; $t_4 = \frac{2}{81}$; $t_5 = \frac{2}{243}$; $t_6 = \frac{2}{729}$

b) Les réponses varieront. 9. a) $t_1 = 0$; $t_2 = 4$; $t_3 = 18$;
 $t_4 = 48$; $t_5 = 100$; $t_6 = 180$ b) Les réponses varieront.

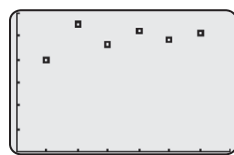
10. π 11. $\frac{1}{3}$

12. a) i) 0 b) i) 0



ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0, n \in \mathbb{N}$ ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2-n}) = 0, n \in \mathbb{N}$

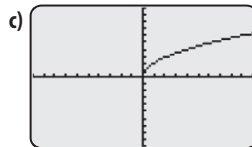
c) i) 5 ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 5, n \in \mathbb{N}$



13. a) $\mathbb{R}$ b) i) 0 ii) 0 iii) 0 iv) 0 c) Les réponses varieront :

Puisque $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$, le graphique est continu en

$x = -2$. 14. a) $\lim_{l \rightarrow 0^+} 2\sqrt{l} = 0$ b) Les réponses varieront.



15. a) R2 : 1,000 000 R3 : 2,000 000 R4 : $\frac{3}{2}$, 1,500 000

R5 : 5, $\frac{5}{3}$, 1,666 667 R6 : 8, $\frac{8}{5}$, 1,600 000

R7 : 13, $\frac{13}{8}$, 1,625 000 R8 : 21, $\frac{21}{13}$, 1,615 385

R9 : 34, $\frac{34}{21}$, 1,619 048 R10 : 55, $\frac{55}{34}$, 1,617 647

b) 1,618 c) Les réponses varieront.

d) Les réponses varieront. e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1,618\,033\,989$

16. a) i) $f(x) = \sqrt{4-x}$

ii) $f(x) = \sqrt{4-x}$

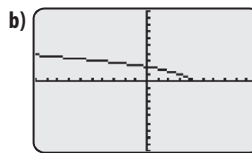
x	y
3,9	0,316 22
3,99	0,1
3,999	0,031 622
3,999	0,01

x	y
4,1	valeur inexistante
4,01	valeur inexistante
4,001	valeur inexistante
4,000 1	valeur inexistante

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{4-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{4-x}$ n'existe pas.

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4-x}$ n'existe pas.



17. a) i)

x	y
-2,1	valeur inexistante
-2,01	valeur inexistante
-2,001	valeur inexistante
-2,000 1	valeur inexistante

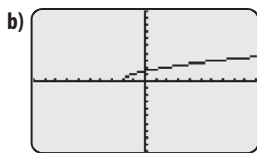
ii)

x	y
-1,9	0,316 23
-1,99	0,1
-1,999	0,031 623
-1,999	0,01

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{x+2}$ n'existe pas.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{x+2} = 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+2}$ n'existe pas.

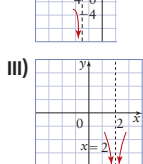


18. a) i) 2,00 \$ ii) 2,25 \$ iii) 2,61 \$ iv) 2,71 \$ v) 2,72 \$
 vi) 2,72 \$ b) Les réponses varieront. c) Les réponses varieront.
 19. Les réponses varieront. Limite de la fraction continue: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; nombre particulier que représente la limite: le nombre d'or 20. 3 21. $n = 5$ et $n = 15$ 22. $k = 5$ et $k = -2$

1.4 Les limites et la continuité, pages 44 à 47

1. Il y a une discontinuité apparente en $x = 3$.
 2. Il est discontinu en $x = 6$. 3. a) En $x = -2$
 b) En $x = -3$ et $x = 1$ 4. a) Discontinuité en un point en $x = -2$ b) Discontinuité infinie en $x = -6$ et $x = 2$
 c) Discontinuité apparente en $x = -2$ 5. a) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$
 b) i) $+\infty$ ii) $-\infty$ iii) N'existe pas iv) N'existe pas
 c) Les réponses varieront: La fonction est discontinue en $x = -1$. 6. a) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ b) i) $-\infty$ ii) $-\infty$
 iii) $-\infty$ iv) N'existe pas c) Les réponses varieront: La fonction est discontinue en $x = 0$.

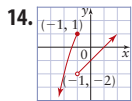
7. a) i) Il y a une discontinuité infinie en $x = -3$.
 ii) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$
 iii) b) i) Il y a une discontinuité infinie en $x = 2$.
 ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$



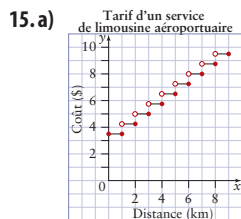
8. a) 3 b) 3 c) 3 d) 1 e) 0 f) 0 g) 0 h) 0 9. a) 1 b) -2
 c) N'existe pas d) 1 e) 2 f) 3 g) N'existe pas h) 2
 10. a) 8 b) 0 c) N'existe pas d) 2 11. a) 8 b) 6 c) -14

- d) $\frac{1}{9}$ e) -32 f) -1 12. a) $\frac{1}{6}$ b) $-\frac{1}{10}$ c) 4 d) $-\frac{1}{6}$ e) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

13. a) -4 b) 2 c) -6 d) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{3}{5}$ f) $\frac{7}{5}$ g) $\frac{13}{5}$

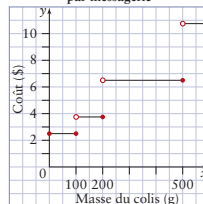


- a) -2 b) 1 c) N'existe pas d) -1



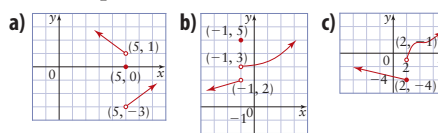
- b) Les réponses varieront: La fonction est une fonction définie par intervalles, fonction partie entière.
 c) La fonction est discontinue aux points correspondant aux distances suivantes: 1 km, 2 km, 3 km, 4 km, 5 km, 6 km, 7 km, etc. Il y a plusieurs discontinuités en un point.

16. a) Coût d'expédition d'un colis par messagerie

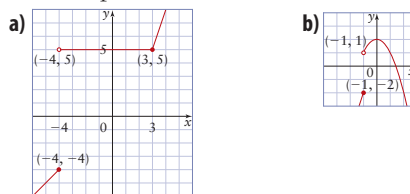


- b) Les réponses varieront: La fonction est une fonction définie par intervalles, fonction partie entière.
 c) La fonction est discontinue aux points correspondant aux masses suivantes: 100 g, 200 g et 500 g. Il y a plusieurs discontinuités en un point.

17. Les réponses varieront.



18. Les réponses varieront.



La fonction est
discontinue en $x = -4$.

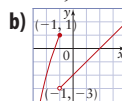
$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$$

La fonction est
discontinue en $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

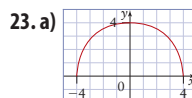
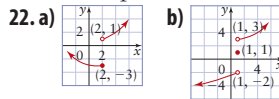
19. a) -5 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ 20. a) Les réponses varieront:

$$a = 2; b = 2$$



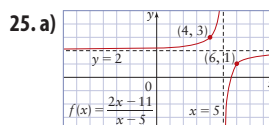
- c) i) -3 ii) 1 iii) N'existe pas iv) 1

21. a) Les réponses varieront. c) i) 3 ii) 3 iii) 3 iv) 3



- b) 0 c) Les réponses varieront. d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{16 - x^2}$ n'existe pas.

24. a) $\frac{1}{12}$ b) 80 c) 21



b) Les réponses varieront: $f(x) = \frac{2x-11}{x-5}$. 26. $x = 4$

27. $x = \pm \frac{1}{2}$, $x = 7$, $x = -\frac{5}{3}$ et $x = \frac{1}{3}$ 28. $x = 30^\circ$

1.5 Une introduction aux dérivées, pages 58 à 62

1. a) C b) A c) B 2. a) $f'(x) = 3x^2$ b) i) 108 ii) 0,75 iii) $\frac{4}{3}$

iv) 12 c) i) $y = 108x + 432$ ii) $y = 0,75x + 0,25$

iii) $y = \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}$ iv) $y = 12x - 16$ 3. Les réponses

varieront. 4. a) $f'(x) = 1$ b) i) 1 ii) 1 iii) 1 iv) 1

5. a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = 4x^3$ d) $f(x) = -6x^3$

e) $f(x) = \frac{5}{x}$ f) $f(x) = \sqrt{x}$ 6. a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

b) i) $-\frac{1}{36}$ ii) -4 iii) $-\frac{9}{4}$ iv) $-\frac{1}{4}$ c) i) $y = -\frac{1}{36}x - \frac{1}{3}$

ii) $y = -4x - 4$ iii) $y = -\frac{9}{4}x + 3$ iv) $y = -\frac{1}{4}x + 1$

7. Les réponses varieront. a) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}$

ou $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$ 8. Les réponses

varieront: a) affine; b) cubique; c) constante; d) du

second degré 9. a) $\frac{dy}{dx} = 2x$ b) $x \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$ c) Les

réponses varieront. 10. a) i) $\frac{dy}{dx} = -6x$ ii) $\frac{dy}{dx} = 8x$

b) Les réponses varieront. c) i) $\frac{dy}{dx} = -4x$ ii) $\frac{dy}{dx} = 10x$

d) i) $\frac{dy}{dx} = -4x$ ii) $\frac{dy}{dx} = 10x$ 11. a) $\frac{dy}{dx} = 0$ b) Les réponses

varieront: Oui. La pente d'une droite horizontale est 0.

c) $\frac{dy}{dx} = 0$ 12. a) $x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3$ b) i) $\frac{dy}{dx} = 6x^2$

ii) $\frac{dy}{dx} = -3x^2$ 13. a) Les réponses varieront.

b) i) $\frac{dy}{dx} = -12x^2$ ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2$ c) i) $\frac{dy}{dx} = -12x^2$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2$ 14. a) $\frac{dy}{dx} = 8$ i) $-12x^2$

ii) x^2 b) $\frac{dy}{dx} = 6x - 2$ c) $\frac{dy}{dx} = -2x$

d) $\frac{dy}{dx} = 8x + 5$ e) $\frac{dy}{dx} = 8x - 4$

15. a) $x^4 + 4bx^3 + 6b^2x^2 + 4b^3x + b^4$

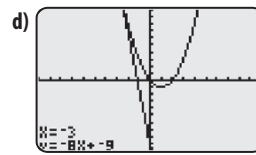
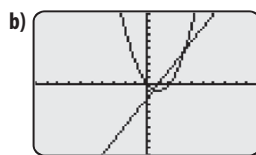
b) i) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ ii) $\frac{dy}{dx} = 8x^3$ iii) $\frac{dy}{dx} = 12x^3$

c) Les réponses varieront. d) i) $\frac{dy}{dx} = -4x^3$ ii) $\frac{dy}{dx} = 2x^3$

e) i) $\frac{dy}{dx} = -4x^3$ ii) $\frac{dy}{dx} = 2x^3$ 16. a) $H'(t) = -9,8t + 3,5$

b) $-1,4$ m/s c) $0,357$ s; $1,625$ m

17. a) $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$



c) $y = -8x - 9$

18. a) i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$ ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$ iii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^2}$

iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3x^2}$ b) Les réponses varieront.

c) i) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

ii) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

iii) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

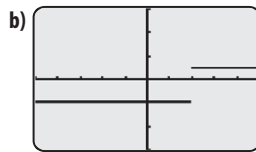
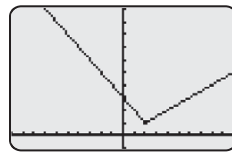
iv) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$

19. a) i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{x^2}$ si $x \leq 2$ et $y = 0,5x$ si $x > 2$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5x^2}$ b) i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{x^2}$

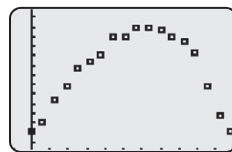
ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5x^2}$ 20. Les réponses varieront. a) Fonction

définie par intervalles: $y = -x + 3$ si $x \leq 2$ et $y = 0,5x$ si $x > 2$



c) Les réponses varieront.

21. a) Les réponses varieront.

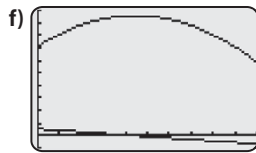


b) $y = -1\,499x^2 + 26\,808x + 356\,532$

c) $\frac{dy}{dx} = -2\,998x + 26\,808$ d) i) $17\,814$ ii) $5\,822$

iii) $-3\,172$ iv) $-12\,166$ v) $-21\,160$

e) Les réponses varieront.



g) Les réponses varieront. 23. a) i) $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

ii) $\frac{dy}{dx} = 1 - 6x^2$ iii) $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 1$

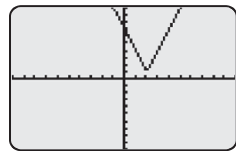
b) i) $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$ ii) $\frac{dy}{dx} = 1 - 6x^2$ iii) $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 1$

24. a) i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$ ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x^4}$ iii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^5}$

b) i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$;
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

c) Les réponses varieront.

25. a) $x = 2$



b) Les réponses varieront 26. a) i) $\frac{dy}{dx} = 0$ ii) $\frac{dy}{dx} = 1$

iii) $\frac{dy}{dx} = 2x$ iv) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ v) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

b) Les réponses varieront. c) i) $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

ii) $\frac{dy}{dx} = 6x^5$ d) i) $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ ii) $\frac{dy}{dx} = 6x^5$

e) $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ f) Les réponses varieront.

27. a) Différence des carrés b) i) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

ii) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$ iii) $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ c) Les réponses varieront:

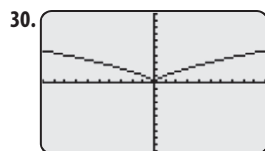
Il est plus simple de factoriser que de développer.

28. a) $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

b) $f'(x) = \frac{13}{(x+4)^2}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$

29. a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,5\}$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0,5\}$



(0, 0); les réponses varieront. b) Les réponses varieront.

31. (1, 2, 2) 32. $x = \sqrt{2}$ 33. 2 009

Révision du chapitre 1, pages 64 et 65

1. a) Les réponses varieront. b) i) -900 l/h ii) -120 l/h

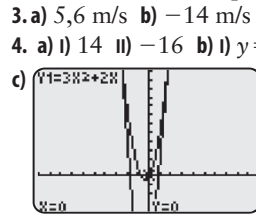
c) i) -900 l/h ii) -600 l/h iii) -150 l/h d) i) Les réponses varieront: La pente du graphique serait plus abrupte.

ii) Les réponses varieront: Le graphique se déplacerait vers le haut et se prolongerait davantage vers la droite. e) Les réponses varieront.

2. Les réponses varieront: a) Le volume d'essence qui reste dans le réservoir pendant que la voiture roule b) Le volume d'eau dans un bûcher à mesure qu'on le remplit d'eau c) La vitesse d'un avion qui se déplace sur la piste au décollage d) La vitesse d'une automobile au moment où on freine pour l'arrêter à un feu rouge

3. a) 5,6 m/s b) -14 m/s c) Les réponses varieront.

4. a) i) 14 ii) -16 b) i) $y = 14x - 12$ ii) $y = -16x - 27$



5. a) $t_1 = \frac{4}{3}$; $t_2 = \frac{1}{6}$; $t_3 = -\frac{4}{9}$; $t_4 = -\frac{11}{12}$; $t_5 = -\frac{4}{3}$

b) Non. Les explications varieront: La suite n'admet pas de limite quand $n \rightarrow \infty$. Elle est divergente.

6. a) $t_1 = \frac{35}{8}$; $t_2 = \frac{245}{64}$; $t_3 = \frac{1715}{512}$; $t_4 = -\frac{12005}{4096}$; $t_5 = \frac{84035}{32768}$

b) 0 c) 13 rebonds 7. a) La fonction est continue en $x = 3$.

Les réponses varieront. b) Les réponses varieront:

La fonction est discontinue en $x = -3$, où il y a une asymptote verticale. Les réponses varieront.

8. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < 0 \text{ ou } 0 < x < \infty\}$;

$\{y \in \mathbb{R} \mid -\infty < y \leq -2\}$ b) i) -2 ii) -2 iii) $-\infty$ iv) $-\infty$

c) Les réponses varieront: La fonction est discontinue en

$x = 0$. 9. a) -4 b) $\frac{15}{7}$ c) La limite n'existe pas. d) $\frac{7}{6}$

e) 14 10. Les réponses varieront: À mesure que x

s'approche de -6 par la gauche, le graphique de $y = h(x)$

tend vers $y = 3$. À mesure que x s'approche de -6 par la

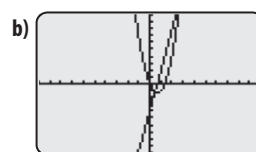
droite, le graphique de $y = h(x)$ tend vers $y = 3$. Il y a une

coupure dans le graphique de $y = g(x)$ au point (-6, 3).

Puisque $h(-6) \neq 3$, la fonction est discontinue en $x = -6$.

11. a) $\frac{dy}{dx} = 4$ b) $h'(x) = 22x + 2$ c) $s'(t) = t^2 - 10t$

d) $f'(x) = 2x + 2$ 12. a) $\frac{dy}{dx} = 6x - 4$



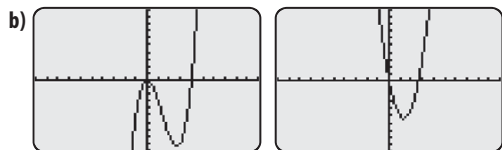
c) $y = -16x - 12$

Test préparatoire du chapitre 1, pages 66 à 67

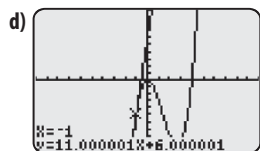
1. C 2. C; il y a un point de retournement en $x = 2$.

3. a) 35 b) 141 c) 7 d) $-\frac{9}{5}$ e) 14 f) 0 4. C

5. a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$



c) $y = 11x + 6$



6. a) -3 b) 1 c) -2 d) -2 e) 1 f) ∞ 7. a) Domaine: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$; image: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 3\}$ b) i) 3 à partir du haut ii) 3 à partir du bas iii) $+\infty$ iv) $-\infty$ v) 9 vi) 1
c) La fonction n'est pas continue. Les explications varieront: À mesure que x s'approche de 4 par la gauche, le graphique tend vers l'infini négatif. À mesure que x s'approche de 4 par la droite, le graphique tend vers l'infini positif. Donc, il y a une discontinuité infinie en $x = 4$.

8. a) $V(x) = 4x - \frac{1}{4}x^3$ b) 0,0625 m³/m

c) -2,75 m³/m 9. a) i) 0,2 m ii) 0,6 m iii) 1 m

b) $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ m²/m c) i) 1,3 m²/m ii) 3,8 m²/m

iii) 6,3 m²/m 10. a) C b) A c) D d) B

CHAPITRE 2 LES DÉRIVÉES

Connaissances préalables, pages 70 à 71

1. a) Polynôme b) Sinusoïdale c) Polynôme
d) Irrationnelle ou radicale e) Exponentielle
f) Rationnelle g) Logarithmique h) Polynôme

2. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $-\frac{3}{2}$ d) Indéfini e) -1 f) 0 3. a) $x^{\frac{1}{2}}$

b) $x^{\frac{1}{3}}$ c) $x^{\frac{3}{4}}$ d) $x^{\frac{2}{5}}$ 4. a) x^{-1} b) $-2x^{-4}$ c) $x^{-\frac{1}{2}}$ d) $x^{-\frac{2}{3}}$

5. a) $(x^3 - 1)(5x + 2)^{-1}$ b) $(3x^4)(5x + 6)^{-\frac{1}{2}}$

c) $(9 - x^2)^3(2x + 1)^{-4}$ d) $(x + 3)^2(1 - 7x^2)^{-\frac{1}{3}}$

6. a) $\frac{1}{x^6}$ b) $2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$ c) $\frac{1}{x^3}$ d) $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ e) c^9

f) $\frac{(4x - 3)^2}{(x^2 + 3)^2}$ 7. a) i) Croissante: $]-\infty, -1[$, $]2,5, \infty[$;

décroissante: $]-1, 2,5[$ ii) Positive: $]-2,5, 2[$ et $]3, \infty[$;

négative: $]-\infty, -2,5[$ et $]2, 3[$ iii) pente zéro: $x = -1$ et $x = 2,5$; pente positive: $]-\infty, -1[$ et $]2,5, \infty[$;

pente négative: $]-1, 2,5[$ b) i) Décroissante: $]-\infty, -2,5[$ et $]1,5, 4,5[$; croissante: $]-2,5, 1,5[$ et $]4,5, \infty[$
ii) Positive: $]-\infty, -4[$ et $]-0,5, 4[$ et $]5, \infty[$; négative: $]-4, -0,5[$ et $]4, 5[$ iii) Pente zéro: $x = -2,5$, $x = 1,5$ et $x = 4,5$; pente positive: $]-2,5, 1,5[$ et $]4,5, \infty[$;

pente négative: $]-\infty, -2,5[$ et $]1,5, 4,5[$

8. a) $x = 2$, $x = 6$ b) $x = -3$, $x = 7$ c) $x = \frac{4}{5}$, $x = 2$

d) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{3}{2}$ e) $\frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$ f) $\frac{-13 \pm \sqrt{217}}{4}$

g) $\frac{9 \pm \sqrt{33}}{8}$ h) $\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ 9. a) -4, -1, 2 b) -1, -0,5, 2

c) -4, $-\frac{1}{3}$, 3 d) -3, $-\frac{1}{5}$, 1 e) -2, $\frac{1}{3}$, 1 f) -3, -1, 2, 4

10. a) $15x^2 - 14x + 20$ b) $-175x^4 - 30x^2 + 126x$

c) $42x^6 + 75x^4 - 48x^3 - 60x$

11. a) $(x^3 - 1)^4(2x + 7)^3(38x^3 + 105x^2 - 8)$

b) $(x^3 + 4)^{-2}(-12x^3 + 15x^2 + 24)$

c) $2\sqrt{x}(x - 1)(x^2 + x + 1)$

d) $x^{-2}(x + 1)^2$ 12. a) 23 b) -5 c) 3

13. a) $f \circ g(x) = \left(\frac{1}{x - 2}\right)^3 + 1$ b) $g \circ h(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} - 2}$

c) $h[f(x)] = \sqrt{-x^6 - 2x^3}$ d) $g[f(x)] = \frac{1}{x^3 - 1}$

14. a) $h(x) = f[g(x)]$ si $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 3$

b) $h(x) = f[g(x)]$ si $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2 + 4x$

c) $h(x) = f[g(x)]$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 3x^2 - 7x$

d) $h(x) = f[g(x)]$ si $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x^3 - 4$

2.1 La dérivée d'une fonction polynôme, pages 83 à 86

1. a, b, e, g, et h 2. a) $\frac{dy}{dx} = 1$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x$ c) $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

d) $\frac{dy}{dx} = -12x^3$ e) $\frac{dy}{dx} = 4,5x^2$ f) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5\sqrt{x^2}}$ g) $\frac{dy}{dx} = \frac{-5}{x^2}$

h) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{x^3}}$ 3. a) 0 b) 90 c) $\frac{3}{16} = 0,1875$ d) -34,3

e) $\frac{3\pi}{2} = 4,712389$ f) $-\frac{1}{12}$ 4. a) $f'(x) = 4x + 3x^2$; règle

de dérivation de la somme de fonctions, règle des

puissances, règle du multiple constant b) $\frac{dy}{dx} = 4x^4 - 3$;

règle de la différence, règle des puissances, règle du multiple constant c) $h'(t) = -4,4t^3$; règle de dérivation de la somme de fonctions, règle des puissances, règle des constantes, règle du multiple constant d) $V'(r) = 4\pi r^2$;

règle des puissances, règle du multiple constant

e) $p'(a) = \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{\sqrt{a}}$; règle de la différence, règle

des puissances, règle du multiple constant

f) $k'(s) = \frac{2}{s^3} + 28s^3$; règle de dérivation de la somme